НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Издательство НУА

НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное и дополненное

Харьков
Издательство НУА
2018

УДК 512.64+514.12] (075.8)
ББК 22.143я73-1+22.151.54я73-1
Э 45

Утверждено на заседании кафедры информационных технологий и математики
Протокол № 9 от 2.04.2018

Составители: *С. В. Михайленко, Е. В. Свищева*
Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *С. Б. Данилевич*

Навчальний посібник містить такі розділи курсу «Математика для економістів»: елементи векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині і в просторі; теорія матриць і визначників; теорія систем лінійних рівнянь алгебри

Э 45 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие / С. В. Михайленко, Е. В. Свищева ; Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики]. – 2-е изд., испр. и доп. – Харьков : Изд-во НУА, 2018. – 104 с.

Учебное пособие содержит следующие разделы курса «Математика для экономистов»: элементы векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве; теория матриц и определителей; теория систем линейных алгебраических уравнений.

УДК 512.64+514.12] (075.8)
ББК 22.143я73-1+22.151.54я73-1

ВВЕДЕНИЕ

В хозяйственной практике человека математика используется с момента своего зарождения. На протяжении тысячелетий арифметика и геометрия применялись для разнообразных измерений и вычислений. Дальнейшее развитие математики долгое время определялось в основном потребностями естественных и технических наук, а также внутренней логикой развития математики. Затем возникла насущная потребность в математике применительно к сфере социальных и гуманитарных наук. Математические теории и методы буквально пронизали все другие науки. Вряд ли можно указать сферу практической и духовной деятельности человека, где не применяются сейчас методы математического исследования. Современный экономист, которому приходится работать в условиях рыночной компьютеризированной экономики, не мыслится без знаний в области моделирования экономических явлений. Когда мы говорим о применении математики в экономике, то имеем в виду не просто проведение различного рода экономических расчетов, а использование математики для изучения экономических закономерностей, получения новых теоретических выводов, нахождения наилучших социально-экономических решений. Экономико-математические методы, базирующиеся на современных достижениях в области экономической теории, математики и информационных технологий, обогащают экономическую науку и способствуют ее переходу на новую, более высокую ступень. Это обеспечивает не только лучшее удовлетворение непосредственных запросов практики, но и новый плодотворный подход к решению крупных теоретических проблем в самой экономической науке. Применение экономико-математических методов может быть эффективным только при наличии высококвалифицированных кадров. Чтобы применять математику как метод исследования, важно осознать и хорошо усвоить сущность и взаимосвязь ее основных идей и понятий, овладеть процессом творческого, а не формального мышления. Задача это не простая, но решаема каждым, кто серьезно и последовательно займется изучением математики.

РАЗДЕЛ I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава 1. Векторы в R_3

1.1. Основные сведения о векторе. Линейные операции над векторами

Величины, которые используются на практике, можно разделить на два вида. Одни из них задаются одним числом (например, длина отрезка, цена одной единицы некоторого товара и т.п.) в некоторых единицах измерения (длина в см, м, или км, цена товара в гривнах, рублях и т.п.). Такие величины называются ***скалярными величинами*** или просто ***скалярами***. Наряду с этим используются величины, для характеристики которых недостаточно лишь одной скалярной величины. Рассмотрим ***геометрическое определение*** вектора в R_3. ***Вектор*** – это направленный отрезок. Чтобы изобразить вектор в декартовой системе координат, необходимо задать направление вектора и его длину, называемую также ***модулем*** вектора. Обозначается вектор $\bar{a}$ или $\overline{AB}$, где точка A – начало вектора, точка B – конец вектора. Модуль вектора обозначается $|\bar{a}| = a$ или $|\overline{AB}| = AB$. Вектор, конец которого совпадает с его началом, называется ***нулевым*** вектором. Модуль нулевого вектора равен нулю. Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной или на параллельных прямых. Два вектора будем считать ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Можно сказать, что это один и тот же вектор, но перенесенный в другое место.

Линейные операции над векторами

1. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на число k*** называется вектор $\bar{b} = k\bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, имеющий одинаковое направление с вектором $\bar{a}$ при $k > 0$, противоположное при $k < 0$ и $|\bar{b}| = |k| \cdot |\bar{a}|$. В частности, если $\bar{b} = (-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$, то вектор $\bar{b} = -\bar{a}$ называется ***противоположным*** к вектору $\bar{a}$.

2. Сложение векторов.

Для сложения векторов можно использовать два правила.

Первое правило (*правило параллелограмма*): чтобы сложить два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, переносят начало векторов в одну точку, затем на них строят параллелограмм. Диагональ параллелограмма, выходящая из этой же точки, и дает сумму $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (рис.1).

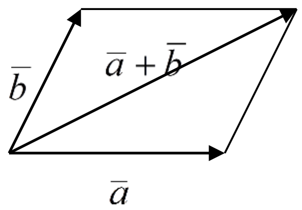


Рис. 1

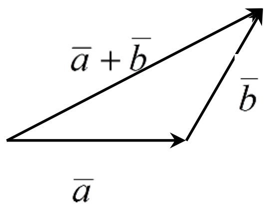


Рис. 2

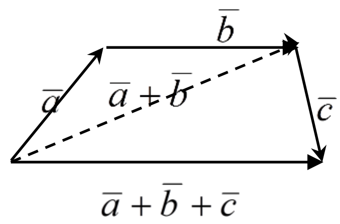


Рис. 3

Второе правило *(правило треугольника)*: чтобы сложить два вектора, к концу первого вектора надо приставить начало второго, тогда суммой векторов будет замыкающий вектор, т.е. вектор, идущий от начала первого вектора в конец второго (рис. 2). Второе правило удобно применять, если требуется сложить более двух векторов (рис. 3).

3. Вычитание векторов.

Вычесть от вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$ – это значит к вектору $\bar{a}$ прибавить вектор, противоположный вектору $\bar{b}$, т. е. $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ (рис. 4).

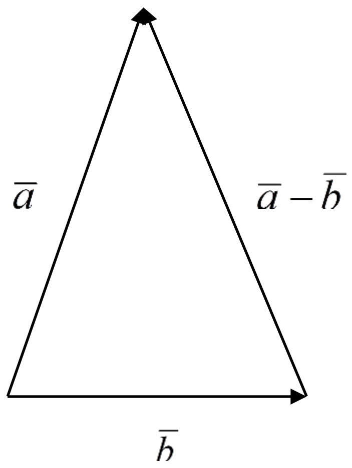


Рис. 4

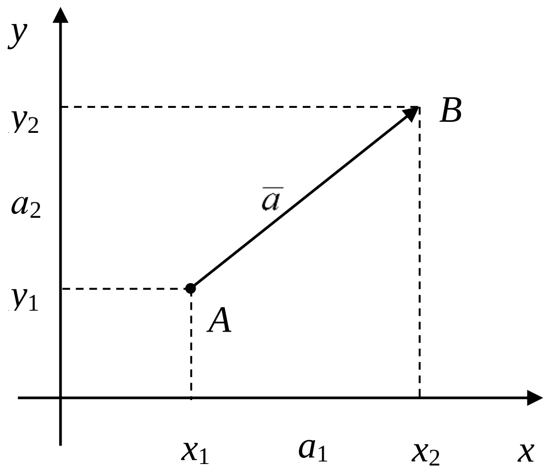


Рис. 5

Наряду с геометрическим используется также ***аналитическое определение*** вектора.

Рассмотрим сначала вектор $\bar{a}$ на плоскости. Он полностью определяется своими проекциями a_1 и a_2 на оси координат.

Записывается это в виде $\bar{a} = (a_1, a_2)$. Числа a_1 и a_2 называются координатами (компонентами) вектора $\bar{a}$. Пусть точка A (x_1, y_1) – начало вектора $\bar{a}$, а точка B (x_2, y_2) – его конец (рис. 5). Тогда

$$\bar{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Вектор, имеющий две координаты, называется ***двумерным***. Совокупность всех двумерных векторов образует двумерное векторное пространство R_2.

Аналогично в пространстве R_3 вектор $\bar{a}$ можно записать в виде $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора. Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$.

В частности, все координаты нулевого вектора равны нулю.

Два вектора $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ называются ***равными***, если равны их соответствующие координаты, т.е. если $a_i = b_i$, $i = \overline{1,3}$.

Над векторами, заданными в аналитическом виде, можно выполнять ***линейные операции***.

1. **Умножение вектора на число.**

Произведением вектора $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ на число k называется вектор

$$k\bar{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3).$$

2. **Сложение векторов.**

Суммой векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ называется вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3).$$

3. **Вычитание векторов.**

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор

$$\bar{a} + (-1)\bar{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3).$$

Нетрудно проверить, что введенные таким образом линейные операции над векторами, заданными в координатной форме, согласуются с линейными операциями над векторами, заданными в геометрическом виде.

Из определения линейных операций над векторами вытекают следующие свойства:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$; 2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

3) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$; 4) $(k_1 + k_2)\bar{a} = k_1\bar{a} + k_2\bar{a}$;

5) $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$; 6) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$.

Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ – коллинеарные векторы. Тогда вектор $\bar{a}$ можно выразить через вектор $\bar{b}$ в виде $\bar{a} = k\bar{b}$. Отсюда получаем: $(a_1, a_2, a_3) = k(b_1, b_2, b_3) = (kb_1, kb_2, kb_3)$. Из равенства векторов следует:

$$a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2,\ a_3 = kb_3.$$

Из этих соотношений получаем ***условие коллинеарности*** двух векторов:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Пример.

Даны точки $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ y;\ 1)$, $C(4;\ 1;\ 3)$ и $D(5;\ -2;\ z)$. При каких значениях y и z векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ будут коллинеарными?

Решение.

Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и записываем эти векторы:

$$\overline{AB} = (2;\ y+2;\ -2),\quad \overline{CD} = (1;\ -3;\ z-3).$$

Для нахождения неизвестных величин y и z воспользуемся условием коллинеарности двух векторов:

$$\frac{2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{-2}{z-3}$$

Это равносильно выполнению двух равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{y+2}{-3} = 2, \\ \dfrac{-2}{z-3} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2 = -6, \\ 2z - 6 = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8, \\ z = 2. \end{cases}$$

Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ будут коллинеарными при $y = -8$ и $z = 2$.

1.2. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – концы отрезка AB, а точка $M(x, y, z)$ делит этот отрезок в отношении $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$. Требуется найти координаты точки M.

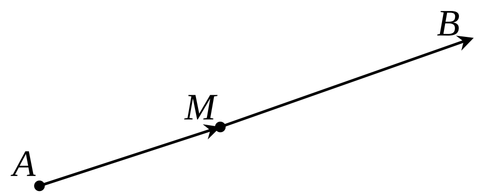


Рис. 6

Векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ коллинеарны (рис. 6). Используя отношение $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$, можно записать $\overline{AM} = \lambda\,\overline{MB}$. Записывая векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ в координатной форме, получаем:

$$(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1) = \lambda(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z).$$

Из равенства векторов имеем:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \qquad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Отсюда получаем координаты точки M:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если M – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и

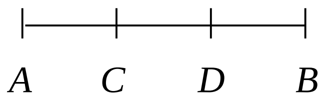
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример.

Даны точки $A(1; -2; 0)$ и $B(3; 2; 4)$. Отрезок AB точками C и D делится на три равные части. Найти координаты точек деления.

Решение.

По условию отрезок AB делится точками C, D на три равные части, т. е. $AC = CD = DB$.



Для точки C $\quad \lambda = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2}.$

Используя формулы для вычисления координат точки деления, получаем:

$$x_C = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}; \quad y_C = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}; \quad z_C = \frac{0 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, получили точку $C\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Для точки D $\lambda = \dfrac{AD}{DB} = 2.$

$$x_D = \frac{1 + 2\cdot 3}{1+2} = \frac{7}{3}; \quad y_D = \frac{-2 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3}; \quad z_D = \frac{0 + 2\cdot 4}{1+2} = \frac{8}{3}.$$

Получили точку $D\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

1.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами, т. е. $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то их скалярное произведение определяется по формуле:

$$(\bar{a},\bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Из определения скалярного произведения вытекают следующие ***свойства*** скалярного произведения:

1. $(\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{b},\ \bar{a})$;

2. $(\lambda\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{a},\ \lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\ \bar{b})$;

3. $(\bar{a}+\bar{b},\ \bar{c}) = (\bar{a},\ \bar{c}) + (\bar{b},\ \bar{c})$;

4. Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны (перпендикулярны). Таким образом, ***условие ортогональности*** двух векторов имеет вид:

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Рассмотрим некоторые ***применения скалярного произведения***.

1. **Вычисление длины (модуля) вектора**.

Рассмотрим скалярное произведение $(\bar{a},\ \bar{a})$:

$$(\bar{a},\ \bar{a}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0 = |\bar{a}|^2.$$

Отсюда получаем формулу: $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\ \bar{a})}$.

Если вектор $\bar{a}$ задан координатами, т. е. $\bar{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, его длину вычисляем по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\ \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

2. Вычисление расстояния между двумя точками.

Требуется вычислить расстояние между двумя заданными точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Находим координаты вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Расстояние между точками M_1 и M_2 – это длина вектора $\overline{M_1M_2}$, т. е.

$$M_1M_2 = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. Вычисление угла между векторами.

Из соотношения $(\bar{a},\ \bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$ (φ – угол между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$), получаем:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ заданы координатами, то угол φ между векторами находим при помощи формулы:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

4. Вычисление проекции вектора $\bar{a}$ на ось, определяемую вектором $\bar{b}$.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось, определяемую вектором $\bar{b}$, является отрезок AC (рис. 7).

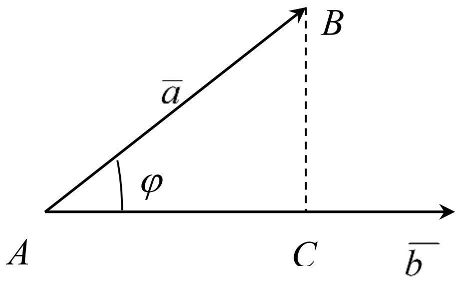


Рис. 7

$$\text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = |\bar{a}| \cdot \frac{(\bar{a},\, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{(\bar{a},\, \bar{b})}{|\bar{b}|}.$$

Таким образом,

$$\text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

5. Вычисление направляющих косинусов вектора $\bar{a}$.

Пусть α, β, γ – это углы между вектором $\bar{a}$ и положительными направлениями осей $0x$, $0y$, $0z$. Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Угол α – это угол между вектором $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ и вектором (1; 0; 0), имеющим направление оси $0x$. Используя формулу для нахождения угла между векторами, находим $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Аналогично получаем:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Пример 1.

Найти угол B и длину медианы BK треугольника ABC, зная координаты его вершин A (3; –1; 5), B (0; –1; 1), C (1; –3; 3).

Решение.

Угол B – это угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ (рис 8). Находим координаты векторов $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ и их длины:

$$\overline{BA} = (3; 0; 4); \quad |\overline{BA}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\overline{BC} = (1; -2; 2); \quad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Следовательно:

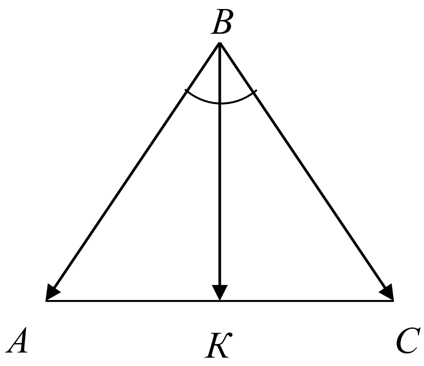


Рис. 8

$$\cos\angle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{3+0+8}{5\cdot 3} = \frac{11}{15};$$

$$\angle B = \arccos\frac{11}{15}.$$

Для нахождения длины медианы BK вычисляем координаты точки K. Точка K делит сторону AC на равные части ($\lambda = 1$), поэтому

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = 2; \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = -2;$$

$$z_K = \frac{z_A + z_C}{2} = 4,$$

т.е. имеем K (2; –2; 4).

Тогда $\overline{BK}$ = (2; –1; 3) и $\left|\overline{BK}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

Пример 2.

При каком значении x векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ будут ортогональны, если заданы точки A (2; 1; –3), B (x; 3; –1), C (1; –1; 6)?

Решение.

Записываем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB} = (x-2; 2; 2);$$
$$\overline{BC} = (1-x; -4; 7).$$

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ будут ортогональными, если $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$, т. е.

$$(x-2)\cdot(1-x) - 8 + 14 = 0.$$

Решаем это уравнение:

$$x - x^2 - 2 + 2x - 8 + 14 = 0,$$
$$-x^2 + 3x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Следовательно:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 4.$$

Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ будут ортогональными в двух случаях: $x_1 = -1$, т. е. B_1(–1; 3; –1) и $x_2 = 4$, т. е. B_2(4; 3; –1).

Глава 2. Векторы в R_n

2.1. Основные понятия и определения

Вектором в R_n называется упорядоченный набор из n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называемых координатами или компонентами вектора.

Записываем это в виде $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Вектор, у которого все координаты равны нулю, называется **нулевым**. Вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равен вектору $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. ***Линейные операции*** над векторами в R_n выполняются так же, как и в R_3.

1. Умножение вектора на число.

Произведение вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число k есть вектор

$$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

2. Сложение векторов.

Сумма векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ есть вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

3. Разность векторов.

Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть вектор

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если $\bar{a} = k\bar{b}$. Из этого равенства получаем ***условие коллинеарности*** двух векторов:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное сумме произведений одноименных координат:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Скалярное произведение векторов в R_n имеет те же свойства, что и скалярное произведение векторов в R_3.

Длиной вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется число $|\bar{a}|$, равное

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Углом между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называют угол φ $(0 \le \varphi \le \pi)$, косинус которого равен

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***ортогональными***, если

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0.$$

Пример.

Даны векторы

$$\bar{a} = (2; –1; 3; 4),\ \bar{b} = (–1; –4; –2; 1),\ \bar{c} = (5; 1; –3; 3).$$

Требуется:

1. Найти вектор
$$\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c};$$
2. Проверить, есть ли среди векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ортогональные.

Решение.

1. $\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c} = 2(2; -1; 3; 4) + (-1; -4; -2; 1) - 3(5; 1; -3; 3) = (4; -2; 6; 8) + (-1; -4; -2; 1) - (15; 3; -9; 9) = (-12; -9; 13; 0)$.

2. Вычисляем скалярные произведения векторов:

$(\bar{a}, \bar{b}) = -2 + 4 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональные.

$(\bar{a}, \bar{c}) = 10 - 1 - 9 + 12 \neq 0 \Rightarrow$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не ортогональные.

$(\bar{b}, \bar{c}) = -5 - 4 + 6 + 3 = 0 \Rightarrow$ векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ ортогональные.

2.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ называется выражение вида

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m.$$

Рассмотрим понятие линейной зависимости и независимости векторов.

Определение 1.

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ называются ***линейно независимыми***, если равенство

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m = 0$$

выполняется только при $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Если же это равенство выполняется при коэффициентах k_i, среди которых есть хотя бы один отличный от нуля, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ линейно зависимы.

Определение 2.

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ называются ***линейно зависимыми***, если хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных. Если же это невозможно, то векторы линейно независимы.

Утверждение.

Определение 1 и определение 2 эквивалентны.

Доказательство.

1. Пусть векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ линейно зависимые в смысле первого определения, т. е. равенство $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + ... + k_m\bar{a}_m = 0$ выполняется при коэффициентах k_i, среди которых есть отличные от нуля. Пусть, например, $k_1 \neq 0$. Находим вектор $\bar{a}_1$:

$$\bar{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\bar{a}_2 - \frac{k_3}{k_1}\bar{a}_3 - ... - \frac{k_m}{k_1}\bar{a}_m.$$

Таким образом, вектор $\bar{a}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов; это означает, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ являются линейно зависимыми в смысле второго определения.

2. Пусть векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ линейно зависимы в смысле второго определения. Тогда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных. Пусть, например, $\bar{a}_1 = k_1\bar{a}_2 + k_2\bar{a}_3 + ... + k_{m-1}\bar{a}_m$. Из этой зависимости получаем: $\bar{a}_1 - k_1\bar{a}_2 - ... - k_{m-1}\bar{a}_m = 0$, что означает, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ линейно зависимы в смысле первого определения.

Из определения линейной зависимости вытекают следующие утверждения:

1) если векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ линейно независимы, то и любая их частичная совокупность линейно независима;

2) если к линейно зависимым векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_m$ добавить один или несколько векторов, то полученная совокупность векторов линейно зависимая.

ассмотрим **линейную зависимость векторов в пространствах *R*2 и *R*3**:

1. *Два коллинеарные векторы линейно зависимы; два неколлинеарные векторы линейно независимы.*

Действительно, если векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ коллинеарные, то $\bar{a}_2 = k\bar{a}_1$. Это и означает, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ линейно зависимые.

2. *Три любые вектора, лежащие в одной плоскости, всегда линейно зависимы.*

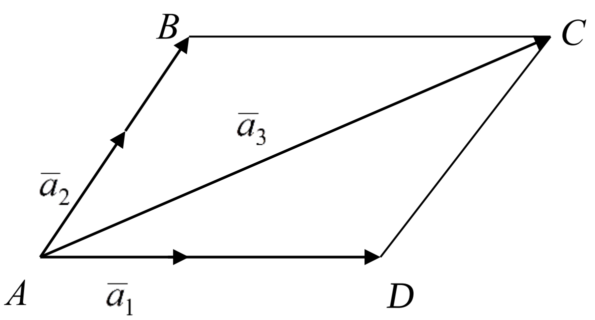


Рис. 9

Рассмотрим произвольные три вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Если среди этих векторов есть коллинеарные, то векторы линейно зависимые. Пусть среди этих векторов нет коллинеарных. Перенесем начало всех векторов в одну точку и построим параллелограмм,

диагональю которого является вектор $\bar{a}_3$ (рис. 9). Из определения суммы двух векторов имеем: $\bar{a}_3 = \overline{AD} + \overline{AB}$.
Вектор $\overline{AD}$ коллинеарен вектору $\bar{a}_1$, поэтому $\overline{AD} = k_1\bar{a}_1$. Аналогично $\overline{AB} = k_2\bar{a}_2$.
Таким образом, $\bar{a}_3 = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2$, что и означает линейную зависимость векторов.

3. *Три вектора, не лежащие в одной плоскости, линейно независимы*.
4. *Четыре и более векторов всегда линейно зависимы*.

Таким образом, ***максимальное число линейно независимых векторов в R_2 равно двум, в R_3 равно трем***.

Пример.
Исследовать на линейную зависимость векторы

$$\bar{a}_1 = (2;\ 2;\ 2),\ \bar{a}_2 = (2;\ 3;\ 4),\ \bar{a}_3 = (2;\ 5;\ 5).$$

Решение.
Воспользуемся первым определением линейной зависимости векторов. Если равенство $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3 = 0$ выполняются только при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, то векторы линейно независимы. В противном же случае (среди коэффициентов k_i есть отличные от нуля) векторы линейно зависимые.

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3 = 0 \ \Rightarrow$$
$$k_1(2;\ 2;\ 2) + k_2(2;\ 3;\ 4) + k_3(2;\ 5;\ 5) = 0 \ \Rightarrow$$
$$(2k_1 + 2k_2 + 2k_3,\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3,\ 2k_1 + 4k_2 + 5k_3) = 0.$$

Из равенства векторов получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0, \\ 2k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения второе, получаем $k_2 = 0$.
Подставляя $k_2 = 0$ в первое и второе уравнения системы, получаем:

$$\begin{cases} 2k_1 + 2k_3 = 0, \\ 2k_1 + 5k_3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является

$$k_1 = k_3 = 0.$$

Таким образом, равенство $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3 = 0$ выполняется только при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Это и означает, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ линейно независимы.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется сумма (разность) векторов?

2. Можно ли сложить векторы $\bar{a} = (2; -1; 0)$ и $\bar{b} = (0; 3; 2; -4)$?

3. Какие векторы называется коллинеарными? Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.

4. Заданы векторы $\bar{a} = (2; -1; 1)$, $\bar{b} = (4; y; -2)$, $\bar{c} = (8; 6; -4)$. Можно ли найти y так, чтобы:
1) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарными;
2) векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ были коллинеарными?

5. В каком случае $\bar{a} = \bar{b}$?

6. Можно ли найти такое значение α, при котором выполняется равенство $\bar{a} = \bar{b}$, если $\bar{a} = (2; -1; 3; 4)$, $\bar{b} = (2; \alpha; 3; 2 + \alpha)$?

7. Может ли точка C (2; –1; 3) быть серединой отрезка AB, если известны A (1; 2; –1) и B (3; –4; 3)?

8. A (2; 4; –1) и C (4; 0; 3) – противоположные вершины параллелограмма. Какие координаты имеет точка пересечения диагоналей этого параллелограмма?

9. Дайте определение скалярного произведения векторов. В каком случае скалярное произведение равно нулю?

10. Можно ли вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = (3; -1; 0; 4)$ и $\bar{b} = (2; 1; -1; 0; 5)$?

11. Являются ли векторы $\bar{a} = (2; -1; 3; 1)$ и $\bar{b} = (4; 5; -1; 0)$ ортогональными?

12. Заданы векторы $\bar{a} = (-2; 1; 2)$ и $\bar{b} = (0; -3; -4)$. Какое из соотношений справедливо: $|\bar{a}| < |\bar{b}|$; $|\bar{a}| = |\bar{b}|$; $|\bar{a}| > |\bar{b}|$?

13. В каком случае векторы $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$ ортогональны?

14. Как записать условие линейной зависимости векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?

15. Какое максимальное число линейно независимых векторов можно указать в R_3?

16. Можно ли найти такие значения переменных α, β, γ, при которых векторы $\bar{a} = (\alpha; 0; 0)$, $\bar{b} = (0; \beta; 0)$, $\bar{c} = (0; 0; \gamma)$ будут линейно зависимы?

Глава 3. Аналитическая геометрия на плоскости

3.1. Понятие уравнения линии в R_2. Пересечение линий

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждой точке плоскости соответствует пара чисел, взятых в определенном порядке – координаты точки. Верно и обратное, т. е. каждой паре чисел соответствует единственная точка плоскости. Пусть на плоскости Oxy дана некоторая линия L. Рассмотрим произвольную точку M этой линии. При перемещении точки M по данной линии ее координаты будут меняться, оставаясь, однако, связанными некоторым условием, характеризующим точки этой линии.

Уравнение $F(x, y) = 0$ $(y = f(x))$ называется **уравнением линии** L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии, т. е. линия *L – это геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению*

$$F(x, y) = 0 \quad (y = f(x)).$$

Уравнение $y = f(x)$ называется уравнением линии в **явной** форме, а уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии в **неявной** форме. Входящие в уравнение координаты x и y произвольной точки M называются **текущими** координатами точки.

Примером уравнения линии, заданной в явном виде, является уравнение параболы $y = x^2$; примером уравнения линии, заданной в неявном виде, является уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Непосредственно из определения линии получаем, что для того, чтобы проверить, лежит ли точка на заданной линии L, необходимо подставить координаты этой точки в уравнение линии. Если при подстановке координат точки получаем тождество, это означает, что точка лежит на линии L. В противном случае точка не принадлежит линии L.

Пример 1.

Проверить, принадлежат ли точки

$M_1(-2; -6)$ и $M_2(3; 1)$ окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Решение.

Подставляем координаты точки $M_1(-2; -6)$ в уравнение окружности:

$$(-2 - 1)^2 + (-6 + 2)^2 = 25 \Rightarrow 9 + 16 = 25.$$

Отсюда вытекает, что точка M_1 лежит на окружности.
Подставляем координаты точки $M_2(3; 1)$ в уравнение окружности:

$$(3 - 1)^2 + (1 + 2)^2 = 4 + 9 \neq 25,$$

т. е. точка M_2 не лежит на окружности.

Иногда линию на плоскости удобно задавать системой уравнений, в которой каждая текущая координата есть некоторая функция одной переменной

t, называемой параметром (в механике это время t). В этом случае уравнение линии имеет вид:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

и называется уравнением линии в ***параметрической форме***. При фиксированном значении $t = t_0$ получаем координаты $x_0 = \varphi(t_0)$, $y = \psi(t_0)$ точки M_0 линии.

Исключив t из уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, получим уравнение линии в виде $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$.

Пример 2. Задана линия в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t. \end{cases}$$

Возводим в квадрат каждое равенство и складываем полученные равенства:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cdot \cos^2 t, \\ y^2 = r^2 \cdot \sin^2 t, \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Таким образом, заданная линия является окружностью с центром в начале координат.

Пусть даны две линии $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$.

Требуется найти ***точки пересечения*** этих линий.

Если существует точка пересечения этих линий, то она принадлежит и первой и второй линиям. Поэтому, чтобы найти точки пересечения двух линий, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пример 3.

Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 4$ и параболы $y = 2 - x^2$.

Решение.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - y + y^2 = 4, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x^2 = 2 - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1; \quad y_2 = 2, \\ x^2 = 2 - y. \end{cases}$$

Рассмотрим $y_1 = -1$. Тогда $x^2 = 2 - y = 3 \Rightarrow\ x = \pm\sqrt{3}$. Получаем две точки пересечения: $M_1(-\sqrt{3}; -1)$ и $M_2(\sqrt{3}; -1)$.

Рассмотрим $y_2 = 2$. Тогда $x^2 = 2 - y = 0 \Rightarrow\ x = 0$. Получаем третью точку пересечения $M_3(0; 2)$.

Таким образом, имеем три точки пересечения заданных линий: $M_1(-\sqrt{3}; -1)$, $M_2(\sqrt{3}; -1)$, $M_3(0; 2)$.

3.2. Прямая в R_2. Различные формы записи уравнения прямой

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть рассматриваемая прямая пересекает ось $0y$ в точке $A(0; b)$ и образует угол φ с положительным направлением оси $0x$, то есть угол φ – это угол, на который необходимо повернуть против часовой стрелки ось $0x$ до совпадения с данной прямой. Рассмотрим произвольную точку прямой $C(x, y)$ и треугольник ACD (рис 10).

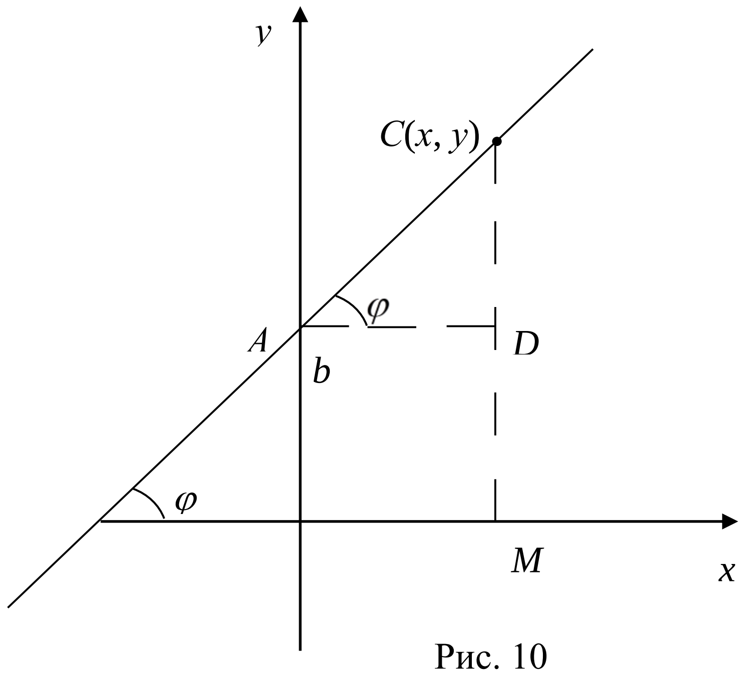


Рис. 10

$$CD = CM - DM = y - b; \qquad AD = x; \qquad \frac{CD}{AD} = \mathrm{tg}\varphi.$$

Угловым коэффициентом k прямой называется тангенс угла наклона прямой к оси $0x$, то есть $k = \mathrm{tg}\,\varphi$ $\left(\varphi \neq \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{CD}{AD} = \mathrm{tg}\varphi \;\Rightarrow\; \frac{y-b}{x} = k \;\Rightarrow\; y = kx + b.$$

Таким образом, уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b.$$

Если прямая параллельна оси $0x$, то $k = \mathrm{tg}0 = 0$ и уравнение прямой будет иметь вид $y = b$.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и уравнение будет иметь вид $y = kx$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Рассмотрим прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и образующую с положительным направлением оси $0x$ угол φ. Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Прямая проходит через точку $M(x_0, y_0)$, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$.

Получили:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Пример.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5; -1)$ и образующей с положительным направлением оси $0x$ угол 45°.

Решение.

Угловой коэффициент прямой $k = \mathrm{tg}\,45° = 1$. Точка M имеет координаты $x_0 = 5$ и $y_0 = -1$. Подставляя значения x_0, y_0, k в уравнение прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$, получаем: $y + 1 = 1 \cdot (x - 5) \;\Rightarrow\; y = x - 6$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Рассмотрим на плоскости прямую, проходящую через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$) (рис. 11). Пусть $C(x, y)$ произвольная точка этой прямой. Векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарные. Находим координаты этих векторов: $\overline{AC} = (x - x_1, y - y_1)$; $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Воспользуемся условием коллинеарности двух векторов:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

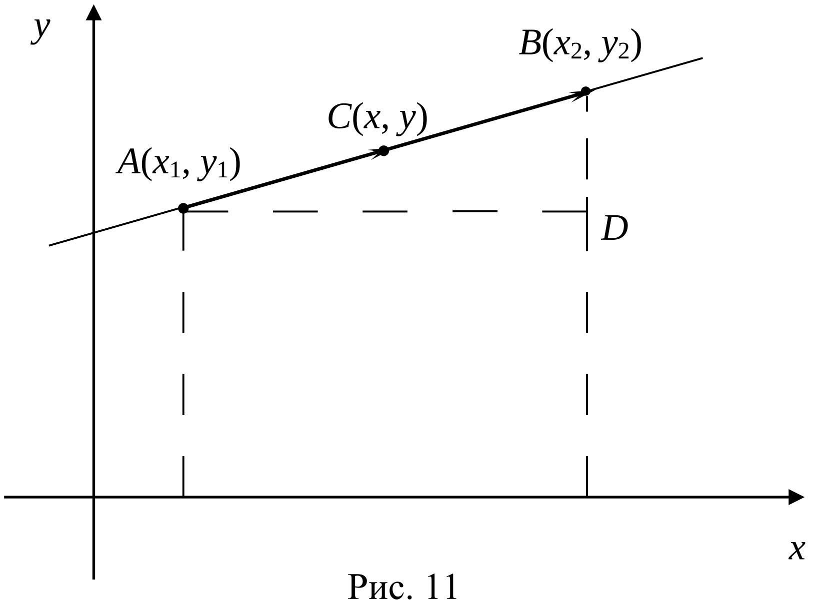


Рис. 11

Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой прямой. Следовательно, полученное уравнение и является уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Если $x_1 = x_2$, то есть заданы две точки прямой $A(x_1, y_1)$ и $B(x_1, y_2)$, то прямая параллельна оси $0y$ и имеет уравнение $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая параллельна оси $0x$ и имеет уравнение $y = y_1$.

Пусть заданы две точки прямой $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и нас интересует не уравнение прямой, а только ее угловой коэффициент k. Из треугольника ABD (рис. 11) находим

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Пример.

Даны вершины треугольника $A(–1; 4)$, $B(3; –2)$, $C(5; 2)$. Составить уравнение медианы BM.

Решение.

Так как BM медиана, то точка M – середина стороны AC, поэтому

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2; \quad y_{\grave{I}} = \frac{y_{\grave{A}} + y_{\tilde{N}}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3,$$ то есть $M(2; 3)$.

Медиана BM проходит через точки B и M. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, получаем:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{3+2} \Rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow 5(x – 3) = –1 \cdot (y + 2) \Rightarrow 5x + y – 13 = 0.$$

Таким образом, уравнение медианы BM имеет вид

$$5x + y – 13 = 0.$$

4. Общее уравнение прямой.

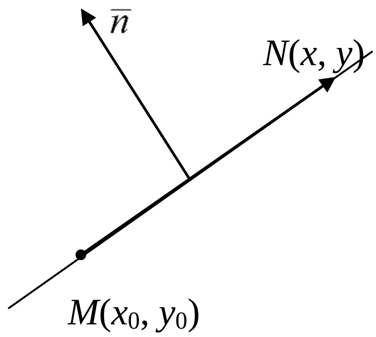


Рис. 12

Пусть прямая задана координатами некоторой точки $M(x_0, y_0)$ и координатами вектора нормали $\overline{n}=(a, b)$, перпендикулярного прямой (рис. 12). Рассмотрим произвольную точку прямой $N(x, y)$. Вектор $\overline{MN} = (x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярен вектору $\overline{n} =(a, b)$. Воспользуемся условием ортогональности двух векторов $(\overline{n}, \overline{MN}) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ $\Rightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$. Обозначив $c = -ax_0 - by_0$, получаем уравнение прямой

$$ax + by + c = 0.$$

Это и есть общее уравнение прямой.

5. Уравнение прямой в отрезках.

Пусть прямая задана длинами a и b направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Этот способ задания возможен только в том случае, когда прямая не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Уравнение прямой можно составить, если известны координаты двух точек этой прямой. В данном случае известны координаты двух точек пересечения с осями координат: $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, получаем:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Пример.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2)$ и образующей с осями координат в первой четверти треугольник, площадь которого равна 4.

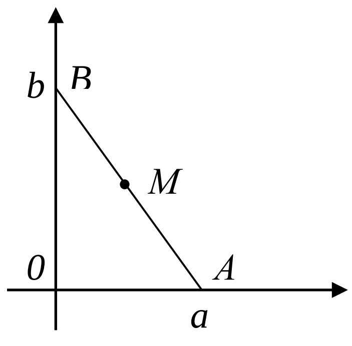


Рис. 13

Решение.

Ищем уравнение прямой в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = 0A$, $b = 0B$ (рис. 13). Точка $M(1;\ 2)$ лежит на этой прямой, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$. Треугольник $A0B$ прямоугольный. Его площадь вычисляем по формуле

$S=\frac{ab}{2}$. По условию площадь треугольника равна 4. Получаем уравнение $\frac{ab}{2}=4$.
Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1,\\ \frac{ab}{2}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1,\\ b=\frac{8}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{a}{4}=1,\\ b=\frac{8}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4a+4=0,\\ b=\frac{8}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=4.\end{cases}$$

Подставляя значения a = 2, b = 4 в уравнение прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, получаем

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1.$$

3.3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $y = k_1x + b_1$ (1) и $y = k_2x + b_2$ (2).

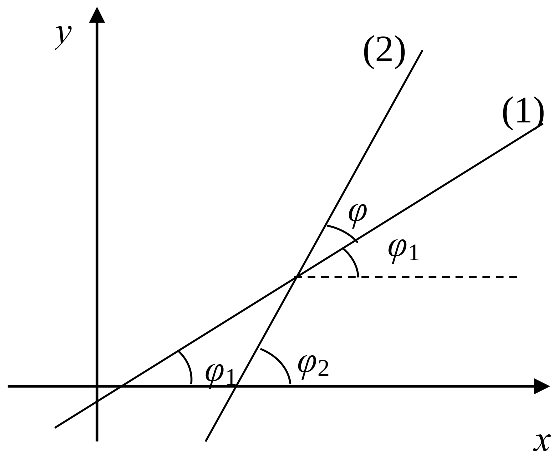


Рис. 14

Углом φ между прямыми (1) и (2) называется угол, на который надо повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой (рис. 14).

Обозначим через φ_1 и φ_2 углы наклона к оси 0x прямых (1) и (2). Из рисунка видно, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Отсюда $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}$.

Так как $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, получаем формулу

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

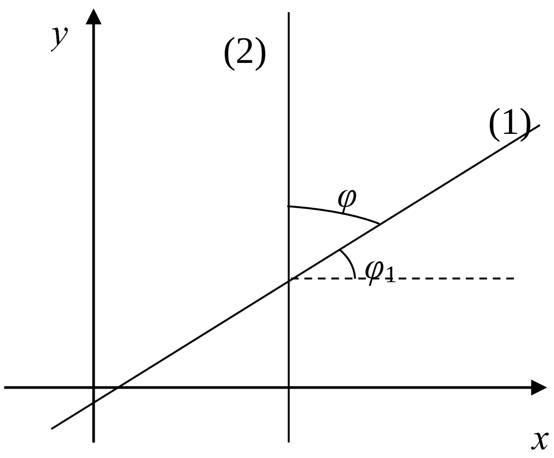


Рис. 15

Заметим, что если одна из заданных прямых параллельна оси 0y, полученная формула не имеет смысла. Пусть, например, прямая (2) параллельна оси 0y (рис. 15). В этом случае, как видно из рис. 15,

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi_1.$$

Пусть прямые (1) и (2) параллельны. Так как прямые параллельны, они образуют с осью $0x$ один и тот же угол, то есть $\varphi_2 = \varphi_1 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}\varphi_1 \;\Rightarrow\; k_2 = k_1$.

Таким образом, **условие параллельности** двух прямых имеет вид

$$k_2 = k_1.$$

Пусть прямые (1) и (2) перпендикулярны. Тогда $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varphi_1$. Тогда $\mathrm{tg}\varphi_2 = \mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{2} + \varphi_1) = -\mathrm{ctg}\varphi_1 = -\dfrac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}$. Учитывая то, что $\mathrm{tg}\varphi_2 = k_2$, $\mathrm{tg}\varphi_1 = k_1$, получаем **условие перпендикулярности** двух прямых:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример 1.

В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения двух его сторон AB: $x + 2y - 4 = 0$, AD: $2x - 3y - 1 = 0$ и координаты вершины $C(3;\,2)$. Написать уравнения сторон BC и CD.

Решение.

Известно, что в параллелограмме противоположные стороны параллельны. Сторона BC параллельна стороне AD. По условию уравнение стороны AD имеет вид: $2x - 3y - 1 = 0$. Отсюда находим $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$. Угловой коэффициент $k_{AD} = \dfrac{2}{3}$. Из условии параллельности двух прямых получаем $k_{BC} = \dfrac{2}{3}$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, записываем уравнение стороны BC:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 3) \;\Rightarrow\; 2x - 3y = 0.$$

Аналогично находим уравнение стороны CD. По условию уравнение стороны AB имеет вид: $x + 2y - 4 = 0$. Отсюда $k_{AD} = -\dfrac{1}{2}$. Сторона CD параллельна AB, поэтому $k_{CD} = -\dfrac{1}{2}$. Записываем уравнение стороны CD: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow$ $x + 2y - 7 = 0$. Таким образом, получены уравнения сторон:

$$BC:\; 2x - 3y = 0,$$

$$CD:\; x + 2y - 7 = 0.$$

Пример 2.

$A(1;\ 0)$, $B(3;\ 6)$, $C(5;\ 2)$ – вершины треугольника ABC. Написать уравнение высоты AM.

Решение.

Высота AM перпендикулярна стороне BC. Используя формулу для нахождения углового коэффициента $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, находим угловой коэффициент стороны BC: $k_{BC} = \dfrac{2-6}{5-3} = -2$. Тогда $k_{AM} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = \dfrac{1}{2}$. Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, записываем уравнение высоты AM:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

3.4. Расстояние от точки до прямой.

Пусть задана прямая $ax + by + c = 0$ и точка $M(x_0, y_0)$, не лежащая на этой прямой. Требуется вычислить расстояние от точки M до прямой. Обозначим это расстояние через $d(M)$. Как известно, вектор $\overline{n} = (a, b)$ перпендикулярен прямой $ax + by + c = 0$. Рассмотрим произвольную точку $L(x, y)$ на прямой (рис. 16). $\overline{n} = \overline{KN} = (a, b)$; $\overline{LM} = (x_0 - x,\ y_0 - y)$. Расстояние от точки M до прямой это $d(M) = KM$.

Для любой точки прямой выполняется равенство $\left| np_{\overline{n}} \overline{LM} \right| = d(M)$.

Используя формулу для вычисления проекции вектора $np_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{(\overline{a},\ \overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}$,

получаем: $d(M) = \dfrac{\left|(\overline{LM},\ \overline{n})\right|}{\left|\overline{n}\right|} = \dfrac{\left|a(x_0 - x) + b(y_0 - y)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 - (ax + by)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

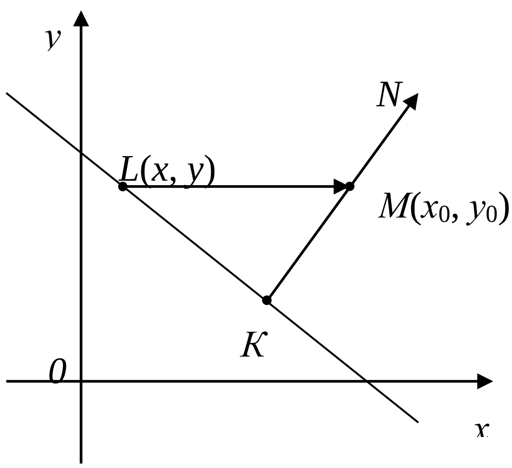


Рис. 16

Так как точка $L(x, y)$ лежит на прямой, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому $ax + by = -c$. С учетом этого равенства получаем:

$$d(M) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 1.

Найти расстояние от точки $M(-2; 3)$ до прямой $3x - 4y + 1 = 0$.

Решение.

В данном случае $x_0 = -2$; $y_0 = 3$. Следовательно:

$$d(M) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5}.$$

Пример 2.

Вычислить расстояние между двумя параллельными прямыми $3x + 4y + 4 = 0$ (1) и $6x + 8y - 1 = 0$ (2).

Решение.

Чтобы найти расстояние между двумя параллельными прямыми, возьмем на одной из прямых произвольную точку и вычислим расстояние от этой точки до второй прямой. Находим точку, например, на прямой (1). Точка имеет две координаты. Одной из координат даем любое значение.

Пусть, например, $x = 0$. Тогда из уравнения (1) получаем $y = -1$. Таким образом, получена точка $M(0; -1)$ на прямой (1). Вычисляем расстояние от точки M до прямой (2):

$$d(M) = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

Итак, расстояние между двумя заданными прямыми равно $\frac{9}{10}$.

3.5. Полуплоскость

Пусть на плоскости задана некоторая прямая, описываемая уравнением $ax + by + c = 0$. Эта прямая делит плоскость на две части, называемые полуплоскостями. Известно, что координаты любой точки, лежащей на прямой, удовлетворяют уравнению прямой $ax + by + c = 0$ и координаты любой точки, не лежащей на этой прямой, этому уравнению не удовлетворяют. Следовательно, координаты точек, принадлежащих полуплоскости (включая прямую) удовлетворяют одному из неравенств $ax + by + c \geq 0$ или $ax + by + c \leq 0$. Для того, чтобы по заданному неравенству $ax + by + c \geq 0$ $(ax + by + c \leq 0)$ найти требуемую полуплоскость, необходимо:

1) построить прямую $ax + by + c = 0$;

2) взять произвольную точку, не лежащую на заданной прямой, и подставить ее координаты в неравенство $ax + by + c \geq 0$ ($ax + by + c \leq 0$). Если при подстановке координат точки получается верное неравенство, это означает, что точка принадлежит требуемой полуплоскости, то есть требуемая полуплоскость – это полуплоскость, в которой лежит эта точка. Если же при подстановке координат точки получается неверное неравенство, это означает, что точка не принадлежит требуемой полуплоскости, то есть требуемая полуплоскость находится с противоположной стороны от прямой.

Если требуется построить область, заданную системой неравенств, строим полуплоскости, определяемые заданными неравенствами и находим их пересечение, то есть точки, удовлетворяющие всем неравенствам.

Пример 1.

Построить полуплоскость $3x - 4y + 12 \geq 0$.

Решение.

Строим прямую $3x - 4y + 12 = 0$. Для этого находим две точки прямой.

x	0	–4
y	3	0

Таким образом, прямая пересекает оси координат в точках $A(0; 3)$ и $B(-4; 0)$ (рис. 17). Прямая разделила плоскость на две полуплоскости. Берем произвольную точку, не лежащую на прямой. В качестве такой точки удобно брать начало координат $O(0; 0)$, если эта точка не лежит на прямой. Подставляем координаты точки $O(0; 0)$ в неравенство: $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \geq 0$, то есть $12 \geq 0$. Неравенство верное. Следовательно, точка $O(0; 0)$ принадлежит требуемой полуплоскости. Стрелками указываем эту полуплоскость и обозначаем ее штриховкой.

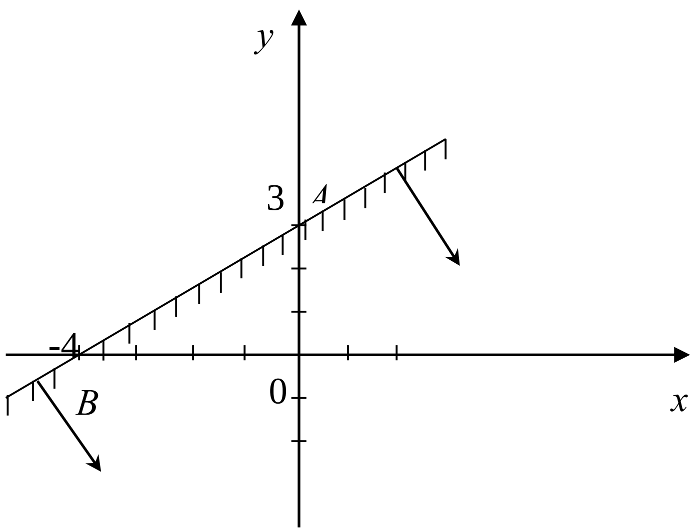


Рис. 17

Пример 2.

Построить множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2, \\ x - 3y + 6 \geq 0, \\ x - 4 \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

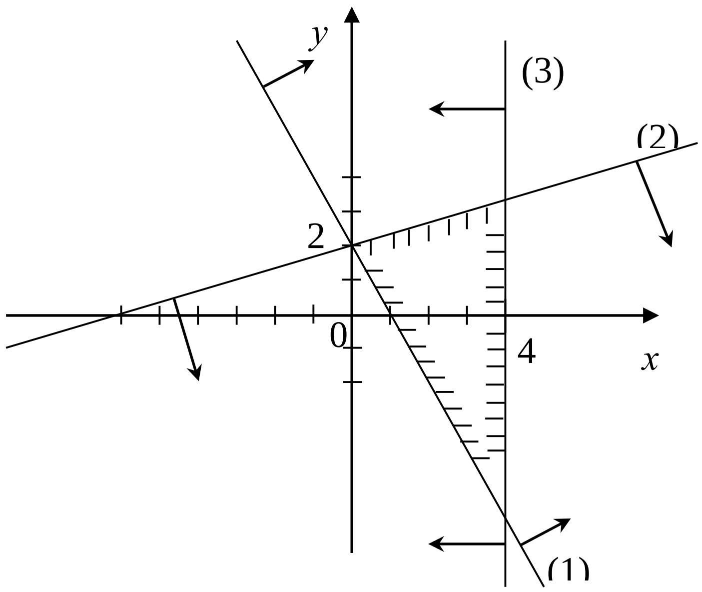


Рис. 18

Строим прямые и стрелками указываем полуплоскости, определяемые заданными неравенствами (рис. 18).

(1): $2x + y = 2$

x	0	1
y	2	0

(2): $x - 3y + 6 = 0$

x	0	-6
y	2	0

(3): $x = 4$

Пересечение полуплоскостей и дает множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям (область обозначена штриховкой).

Глава 4. Аналитическая геометрия в пространстве

4.1. Понятие уравнения поверхности и линии в R_3

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ ($z = f(x, y)$) называют ***уравнением поверхности*** в пространстве R_3, если ему удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей поверхности. Поверхность в пространстве R_3 можно определить также как геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$F(x, y, z) = 0 \quad (z = f(x, y)).$$

Уравнение поверхности может быть задано в явном или в неявном виде: $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности ***в явном виде*** (форме); $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности ***в неявном виде***.

В качестве примера рассмотрим получение уравнения сферы. Как известно, сфера определяется как геометрическое место точек пространства, равноудаленных от заданной точки $M(a, b, c)$, называемой центром сферы. Пусть $K(x, y, \mathrm{z})$ – произвольная точка сферы. Обозначим расстояние от произвольной точки сферы до центра сферы через r (радиус сферы). По определению сферы $|\overline{MK}| = r$.

Вектор $\overline{MK} = (x - a,\ y - b,\ z - c)$. Тогда $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$.

Отсюда получаем уравнение сферы: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

В частности, если центр сферы находится в начале координат, уравнение сферы будет иметь вид $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

т. е. линия есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными. Линия в пространстве может быть задана также в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \\ z = \varphi_3(t). \end{cases}$$

(t – некоторый параметр).

Пример.

Найти координаты центра сферы и ее радиус, если уравнение сферы задано в виде $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение сферы:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 4.$

Из полученного уравнения следует, что центр сферы находится в точке $M(1; -2; 0)$, а радиус сферы $r = 2$.

4.2. Плоскость в R3. Угол между двумя плоскостями

Пусть в пространстве задана произвольная плоскость и $M(x_0, y_0, z_0)$ – какая-нибудь точка на ней. Обозначим через $\overline{n} = (a, b, c)$ ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости (нормаль). Возьмем на плоскости произвольную точку $K(x, y, z)$. Так как вектор $\overline{n}$ перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору, лежащему на плоскости, т. е. вектор $\overline{n}$ перпендикулярен вектору $\overline{MK} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$. Воспользуемся условием ортогональности двух векторов $(\overline{n}, \overline{MK}) = 0$. Отсюда получаем ***уравнение плоскости, проходящей через заданную точку*** $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0.$$

Введем обозначение $(-ax_0 - by_0 - cz_0) = d$. Тогда уравнение плоскости запишется в виде:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Полученное уравнение называется ***общим уравнением*** плоскости.

Пусть заданы две плоскости: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (1) и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ (2). Требуется найти угол φ между этими плоскостями. Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормалями $\overline{n}_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ и $\overline{n}_2 = (a_2,\ b_2,\ c_2)$. Воспользовавшись формулой для нахождения угла между двумя векторами, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Если две плоскости параллельны, то векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны. Воспользовавшись условием коллинеарности двух векторов, получаем ***условие параллельности*** двух плоскостей:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Если же две плоскости перпендикулярны, то и векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ перпендикулярны, поэтому $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$. Отсюда получаем ***условие перпендикулярности*** двух плоскостей:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Пример.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -2; -1)$ параллельно плоскости $2x + 5y - z + 1 = 0$.

Решение.

Так как требуемая плоскость параллельна заданной плоскости, вектор нормали заданной плоскости $\bar{n} = (2; 5; -1)$ будет также вектором нормали и требуемой плоскости. Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку $M(2; -2; -1)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2; 5; -1)$, получаем:

$2(x - 2) + 5(y + 2) - (z + 1) = 0 \ \Rightarrow\ 2x + 5y - z + 5 = 0$ – уравнение требуемой плоскости.

4.3. Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана некоторая плоскость $ax + by + cz + d = 0$ и точка $M(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая этой плоскости. Требуется вычислить расстояние от точки до плоскости. Рассмотрим произвольную точку плоскости $K(x, y, z)$ (рис. 19).

Запишем вектор, соединяющий точки K и M: $\overline{KM} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Вектор $\bar{n} = (a, b, c)$ перпендикулярен плоскости.

Тогда расстояние от точки M до плоскости

$$d(M) = LM = \left|np_{\bar{n}}\overline{KM}\right| = \frac{\left|\left(\overline{KM},\ \bar{n}\right)\right|}{|\bar{n}|} = \frac{\left|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

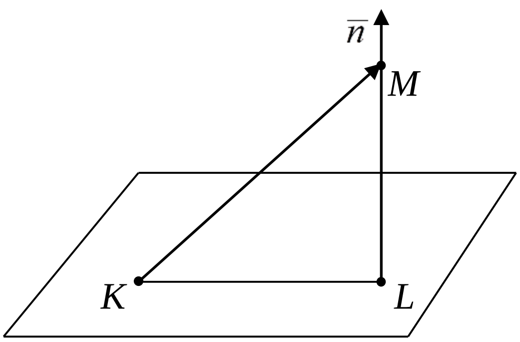


Рис.19

Точка $K(x, y, z)$ лежит на плоскости, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, откуда следует, что $ax + by + cz = -d$. С учетом этого равенства получаем формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости:

$$d(M) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример.

Вычислить расстояние от точки $M(3;\ -2;\ 1)$ до плоскости $2x - y - 2z + 3 = 0$

Решение.

Используя формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости, получаем: $d(M) = \dfrac{|2\cdot 3 - (-2) - 2\cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3.$

Вопросы для самоконтроля

1. Как проверить, принадлежит ли заданная точка $M(x_0,\ y_0)$ линии L, описываемой уравнением $y = f(x)$?
2. Как найти точки пересечения двух заданных своими уравнениями линий?
3. Что такое угловой коэффициент прямой?
4. Какой вид имеет уравнение прямой:
   1) проходящей через начало координат;
   2) параллельной оси Ox;
   3) параллельной оси Oy?
5. Как вычислить угловой коэффициент прямой по известным координатам двух точек прямой?
6. Какой смысл имеют коэффициенты a, b в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$?
7. Как запишется:
   1) условие параллельности двух прямых;
   2) условие перпендикулярности двух прямых?
8. Как вычислить расстояние от точки до прямой?
9. Как вычислить расстояние между двумя параллельными прямыми?
10. Какую область на плоскости определяет неравенство $ax + by + c \geq 0$?
11. Какой вид имеет уравнение поверхности в R_3?
12. Какой смысл имеют коэффициенты a, b, c в общем уравнении плоскости $ax + by + cz + d = 0$?
13. Как найти угол между двумя плоскостями?
14. Сформулируйте условие:
    1) параллельности двух плоскостей;
    2) перпендикулярности двух плоскостей.
15. Как вычислить расстояние от точки до плоскости?

РАЗДЕЛ II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Глава 5. Матрицы и определители

5.1. Основные сведения о матрицах

Матрицей размерности или размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов.

Каждую такую таблицу заключают в круглые скобки, квадратные скобки или двойные вертикальные черточки и обозначают большой буквой латинского алфавита. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ – матрица размерности 2×3,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$ – матрица размерности 2×2,

$$C = \begin{Vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 6 & -3 \end{Vmatrix}$$ – матрица размерности 4×2.

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами матрицы***. Мы будем обозначать их соответствующими маленькими буквами латинского алфавита с двумя индексами. Первый индекс обозначает номер строки, в которой расположен этот элемент, а второй – номер столбца (строки нумеруются сверху вниз, а столбцы слева направо). Так, например, в рассмотренных выше примерах матриц:

$a_{13} = -1,$ $a_{21} = 2,$
$b_{12} = -1,$ $b_{22} = 7,$
$c_{32} = 1,$ $c_{41} = 6.$

В общем случае матрица размерности $m \times n$ записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$.

Если при этом необходимо указать размеры матрицы, то пишут:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ или просто } A_{m\times n}.$$

Приведенные в начале параграфа матрицы с указанием размерности могут быть записаны следующим образом: $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 2}$, $C_{4\times 2}$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется ***вектор-строкой***. Первый индекс у элементов вектор-строки обычно опускается. Например:

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ – вектор-строка (матрица размерности 1×4).

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***вектор-столбцом***. У элементов вектор-столбца опускается второй индекс. Например:

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – вектор- столбец (матрица размерности 3×1).

Матрицу размерности $m \times n$, у которой все элементы равны нулю, называют ***нулевой*** матрицей и обозначают *0*.

Если число строк матрицы не совпадает с числом ее столбцов (т. е. $m \neq n$), то матрица называется ***прямоугольной***. В противном случае ($m = n$) матрица называется ***квадратной***. Квадратную матрицу из n строк и n столбцов называют квадратной матрицей n-го порядка, а число n – порядком этой матрицы. Такая матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющем верхний левый угол с правым нижним, т. е. совокупность элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, называется ***главной диагональю*** матрицы или просто ***диагональю***.

Квадратные матрицы, у которых все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называются ***диагональными*** и записываются:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если у диагональной матрицы все элементы главной диагонали равны 1, то такую матрицу называют ***единичной*** и обозначают *E*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Наряду с главной диагональю иногда рассматривают ***побочную диагональ***, под которой понимают совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющей правый верхний угол с левым нижним.

Рассмотрим матрицу A произвольной размерности $m \times n$. ***Транспонированием*** матрицы A называется замена ее строк на столбцы с сохранением их номеров, т. е. первой строки на первый столбец, второй строки на второй столбец и т. д. Полученная таким образом матрица размерности $n \times m$ называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A и обозначается A^T. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы одинаковой размерности называются ***равными***, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, т. е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ для всех } i = \overline{1,\, m}, \quad j = \overline{1,\, n}.$$

5.2. Действия над матрицами

К числу основных действий над матрицами относятся сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц.

Суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C такой же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B. Таким образом,

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ для всех } i = \overline{1,\, m},\ j = \overline{1,\, n}.$$

Например, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A + B = \begin{pmatrix} -3+0 & 4+(-2) & 1+2 \\ 0+1 & 1+3 & 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A ***на число*** α называется матрица C, все элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на число α. Таким образом,

$$C = \alpha A \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad 2A = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц и умножение матриц на число называются ***линейными действиями*** над матрицами. Из определений этих действий вытекают следующие очевидные свойства:

1) $A + B = B + A$;
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + 0 = A$;
4) $1 \cdot A = A$;
5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta A$;
7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Здесь A, B, C – матрицы, α, β – числа, 0 – нулевая матрица. С помощью действий сложения матриц и умножения на число определяется разность матриц.

Разностью матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C = A + (-1) \cdot B$.

Таким образом, $C = A - B \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 3-1 \\ -1-0 & 0-2 \\ 2-1 & 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B. Таким образом,

$$C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

для всех $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

Умножение матриц можно проиллюстрировать следующей схемой:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \\ 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -4 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы можно умножать лишь в том случае, если количество элементов в строке первой матрицы равно количеству элементов в столбце второй, т. е. число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Из определения произведения матриц видно, что если существует произведение матриц $A \cdot B$, то отсюда не следует существования произведения матриц $B \cdot A$. Так, в приведенном выше примере произведение $B \cdot A$ не существует (не определено).

Если A и B квадратные матрицы одного порядка, то $A \cdot B$ и $B \cdot A$ имеют смысл, но, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произведение матриц не коммутативно (не перестановочно).

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются ***коммутативными*** или перестановочными. Говорят также, что A и B ***коммутируют***.

Произведение матриц обладает следующими свойствами:

1) $EA = AE = A$, где A – квадратная матрица порядка n, а E – единичная матрица того же порядка, т. е. матрица E коммутирует с любой квадратной матрицей того же порядка. Следовательно, единичная матрица среди всех квадратных матриц данного порядка играет в операции умножения такую же роль, как число 1 при умножении чисел.

2) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$.

3) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

5) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Здесь A, B, C – матрицы, α – число. При этом предполагается, что все написанные произведения матриц имеют смысл.

Из свойства 5 следует, что произведение нескольких матриц, записанных в определенном порядке, от способа расстановки скобок не зависит. Например, все пять возможных способов вычисления произведения четырех матриц $((AB)C)D$, $(A(BC))D$, $A((BC)D)$, $A(B(CD))$, $(AB)(CD)$ дают один и тот же результат.

Отметим также, что квадратные матрицы можно возводить в степень. По определению полагаем $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, … . Так как в произведениях нескольких матриц скобки можно расставлять произвольно, то для любых целых неотрицательных p и q имеем $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$, $(A^p)^q = A^{pq}$.

Определение произведения матриц формулируется более сложно и кажется менее естественным, чем определение суммы. Однако, если бы кто-нибудь захотел определить произведение матриц одинаковых размеров, умножая соответствующие элементы, то такое произведение не нашло бы себе существенных применений. Что же касается введенного произведения матриц, то оно, как вскоре будет показано, широко применяется.

5.3. Определители второго и третьего порядка

Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие по определенному правилу некоторое число, которое называется ее ***определителем*** (***детерминантом***) и обозначается $|A|$ или $\det A$. Если матрица задана в виде таблицы чисел, то определитель обозначают, заключая эту таблицу в вертикальные черточки. Элементы матрицы A, ее диагонали, строки и столбцы будем называть соответственно элементами, диагоналями, строками и столбцами определителя $|A|$.

Определителем первого порядка, т. е. определителем матрицы, образованной одним числом, называется само это число.

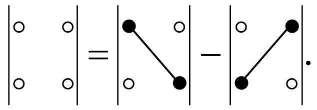
Пусть дана матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, т. е. определителем этой матрицы, называется число $|A|$, вычисляемое по формуле

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Эта формула иллюстрируется следующей схемой:



Таким образом, определитель матрицы второго порядка равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали. Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23.$$

Стоит заметить, что каждое слагаемое формулы (с точностью до знака) представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки.

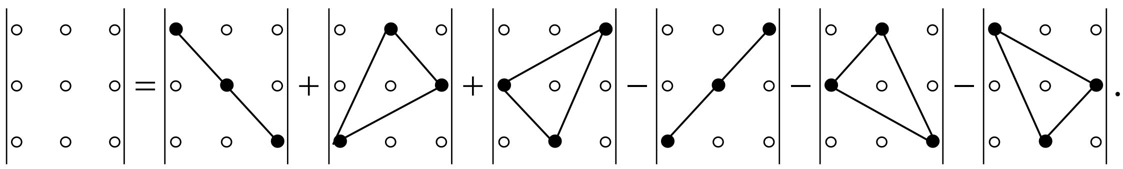
Пусть дана матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка, т. е. определителем этой матрицы, называется число $|A|$, вычисляемое по формуле:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников, которое иллюстрируется схемой:

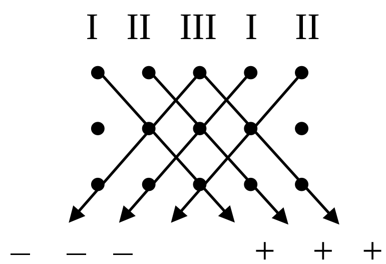


Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot (-5) - 3 \cdot (-1) \cdot (-3) -$$

$$- 0 \cdot (-2) \cdot 1 = -12 - 10 + 40 - 9 = 9.$$

Можно указать другое простое правило вычисления определителей третьего порядка. Для этого составим таблицу (Саррюса), полученную из элементов определителя, если приписать к ним справа еще раз первый и второй столбцы. Возьмем со знаком «+» произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя, а также произведения элементов, стоящих на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента.



Произведения же элементов, стоящих на побочной диагонали и на двух параллелях к ней, содержащих по три элемента, возьмем со знаком «–». Сумма этих шести произведений дает искомый определитель. Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ - & - & - & + & + & + \end{matrix} =$$

$$3\cdot(-2)\cdot 0+2\cdot(-3)\cdot 5+(-1)\cdot 4\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 5-3\cdot(-3)\cdot 1-2\cdot 4\cdot 0=-30-4-10+9=-35$$

Так же, как и в определителе второго порядка, каждое слагаемое формулы (с точностью до знака + или –) равно произведению трех элементов определителя, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки.

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей второго и третьего порядка. Для этого введем понятия минора и алгебраического дополнения элемента a_{ij}.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель той матрицы, которая получается из исходной после вычеркивания i-й строки и j-го столбца, т. е. той строки и того столбца, которые содержат данный элемент.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \text{то}\ \ M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\ \ M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то $M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=18-24=-6$,

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=6-12=-6,\ \ M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=32-35=-3.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},$$

т. е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ – четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ – нечетное число.

Например, для элементов только что рассмотренной матрицы A третьего порядка имеем:

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = 6,$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = 6,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = -3.$

Вернемся к определителям второго порядка. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}:$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22},\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21},$

$A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -a_{12},\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = a_{11}.$

Поэтому определитель второго порядка может быть записан так:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

т. е. он равен сумме произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения. Полученная формула называется разложением определителя по элементам первой строки.

Очевидно, что также справедливы следующие три формулы:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + (-a_{12})a_{21} = A_{22}a_{22} + \mathrm{A}_{21}a_{21} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \ -$$

разложение определителя по элементам второй строки;

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + (-a_{12})a_{21} = a_{11}A_{11} + \mathrm{A}_{21}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} \ -$$

разложение определителя по элементам первого столбца;

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21}) = A_{22}a_{22} + a_{12}A_{12} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} \ -$$

разложение определителя по элементам второго столбца.

Таким образом, определитель второго порядка равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения.

Таким же свойством обладает и определитель третьего порядка. Проверим это для элементов, например, второй строки. Для этого найдем необходимые алгебраические дополнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33},$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}.$$

Рассмотрим формулу

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

В правой части вынесем за скобки числа, являющиеся элементами второй строки:

$$|A| = a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11}).$$

Выражения, стоящие в скобках при элементах a_{ij}, равны вычисленным выше алгебраическим дополнениям этих элементов. Следовательно, получаем разложение определителя по элементам второй строки:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Аналогично можно получить разложение определителя по элементам любой другой строки или любого столбца.

Таким образом, определитель третьего порядка (так же, как и определитель второго порядка) равен сумме произведений элементов любой строки или любого столбца на соответствующие алгебраические дополнения.

Пример.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель по элементам первой строки. Получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(-2-5)+1\cdot(-4+5)-2\cdot(4+2)=-21+1-12=-32.$$

5.4. Определители *n*-го порядка

В предыдущем параграфе было показано, что определители второго и третьего порядков обладают одинаковым свойством – они равны сумме произведений элементов любой строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения. Тем самым вычисление определителей второго порядка сводится к вычислению определителей первого порядка, а определителей третьего порядка – к вычислению определителей второго порядка.

Можно показать (так же, как это было сделано выше для определителей второго и третьего порядков), что у произвольной матрицы четвертого порядка сумма произведений элементов a_{ij} любой строки или любого столбца на соответствующие алгебраические дополнения A_{ij}, которые являются определителями третьего порядка, есть величина постоянная. Она и называется определителем четвертого порядка. Теперь можно аналогичным образом ввести понятие определителя пятого порядка, выразив его через алгебраические дополнения элементов какой–либо строки или столбца, т. е. определители четвертого порядка, которые уже определены. И так далее. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определителем n-го порядка называется число $|A|$, вычисляемое по одной из формул:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} ,$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} .$$

Первая формула называется **разложением определителя по элементам *i*-й строки**, вторая – **разложением определителя по элементам *j*-го столбца**.

Согласно определению вычисление определителей *n*-го порядка сводится к вычислению более простых определителей $(n-1)$–го порядка.

Пример.

Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

В принципе, разложить определитель можно по элементам любой строки (столбца). Однако объем вычислений можно существенно уменьшить, если выбрать такую строку (столбец), в которой есть элементы, равные нулю. При этом чем больше нулей, тем лучше. Наиболее подходящими в нашем случае являются третья строка или четвертый столбец, содержащие по два нуля. Разложим определитель по элементам третьей строки, а получившиеся в результате определители третьего порядка – по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{31} + 0\cdot A_{32} + 2\cdot A_{33} + 0\cdot A_{34} = 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(2\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+2\cdot\left(1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = 1\cdot(2\cdot(-2) + 1\cdot(-1-2)) +$$

$$+2\cdot(1\cdot(-1-2) - 2\cdot(1-1)) = 1\cdot(-7) + 2\cdot(-3) = -13.$$

5.5. Основные свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

Доказательство. Докажем это свойство для определителей третьего порядка. По правилу треугольников имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11},$$

$$\left|\grave{A}^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = .$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + \grave{a}_{21}\grave{a}_{32}\grave{a}_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \grave{a}_{31}\grave{a}_{22}\grave{a}_{13} - \grave{a}_{21}\grave{a}_{12}\grave{a}_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Очевидно, что

$$|A| = |A^T|.$$

Это свойство свидетельствует о равноправии строк и столбцов определителя. Иначе говоря, всякое утверждение, доказанное для строк определителя, будет справедливо и для его столбцов, и наоборот. Поэтому все рассматриваемые далее свойства определителей будем доказывать только для его строк.

2. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель также равен нулю.

Доказательство. Действительно, если все элементы i-й строки определителя равны нулю, то, разложив определитель по элементам этой строки, получим:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Доказательство. Докажем это свойство для определителей третьего порядка. По правилу треугольников получаем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Переставим местами, для определенности, первую и вторую строки, а затем вычислим полученный определитель $|A'|$:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{21}.$$

Полученное выражение для $|A'|$ состоит из тех же шести слагаемых, что и выражение для $|A|$, но взятых с противоположным знаком. Следовательно, $|A'| = -|A|$.

4. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

Доказательство. Поменяем местами в определителе $|A|$ одинаковые строки (столбцы). Полученный определитель $|A'|$, очевидно, ничем не отличается от исходного, поэтому $|A'| = |A|$. С другой стороны, по свойству 3 имеем $|A'| = -|A|$. Следовательно, $|A| = -|A|$, откуда $2|A| = 0$, а значит $|A| = 0$.

5. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Пусть, для определенности, все элементы первой строки имеют общий множитель k т. е. представимы в виде ka_{1j}. Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + \ldots + ka_{1n}A_{1n} =$$

$$= k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех элементов, за знак определителя выносится общий множитель элементов одной строки или столбца. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{но } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это свойство можно сформулировать также следующим образом: если все элементы какой-то строки или столбца определителя умножить на число k, то определитель также умножится на это число k.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.

Доказательство. Пусть i–я и j–я строки определителя пропорциональные, т. е. $a_{j1} = ka_{i1}$, $a_{j2} = ka_{i2}$, …, $a_{jn} = ka_{in}$.

Тогда, применяя свойство 5 о вынесении общего множителя элементов строки за знак определителя и свойство 4 о равенстве нулю определителя с одинаковыми строками, получим:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0.$$

7. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этого определителя равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{pk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq p,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kp} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq p.$$

Доказательство. Рассмотрим определитель $|A'|$, полученный из исходного определителя $|A|$ заменой p-й строки на i-ю:

$$|A'| = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ - i\text{-я строка} \\ \\ - p\text{-я строка.} \\ \\ \end{array}$$

Определитель $|A'|$ имеет две одинаковые строки, поэтому, согласно свойству 4, $|A'| = 0$. С другой стороны, разлагая его по элементам p-й строки, получаем:

$$|A'| = a_{i1} A_{p1} + a_{i2} A_{p2} + \ldots + a_{in} A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{pk}.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{pk} = 0 \quad (i \neq p).$

8. Если все элементы i-й строки представимы в виде суммы двух слагаемых:

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik},$$

то и весь определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых элементами i-й строки являются соответственно первые и вторые слагаемые, а все остальные строки такие же, как у исходного определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для столбцов.

Доказательство. Обозначим определители, стоящие в правой части равенства, $|A'|$ и $|A''|$ соответственно. Разложим исходный определитель $|A|$ по элементам i-й строки и воспользуемся тем, что алгебраические дополнения элементов i-й строки для всех трех определителей одинаковы. Получаем:

$$|A| = (a'_{i1} + a''_{i1}) A_{i1} + (a'_{i2} + a''_{i2}) A_{i2} + \ldots + (a'_{in} + a''_{in}) A_{in} = (a'_{i1} A_{i1} + a'_{i2} A_{i2} + \ldots + a'_{in} A_{in}) +$$
$$+ (a''_{i1} A_{i1} + a''_{i2} A_{i2} + \ldots + a''_{in} A_{in}) = |A'| + |A''|.$$

Ясно, что если все элементы какой-нибудь строки представлены в виде суммы k слагаемых, то определитель также можно представить в виде суммы k определителей.

Пример.

Найти значение определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы первого столбца являются здесь суммами двух слагаемых, поэтому согласно свойству 8 имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый столбец пропорционален последнему, во втором же первый столбец пропорционален третьему. Следовательно, по свойству 6 оба они равны нулю, а значит, $|A| = 0$.

9. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число k.

Доказательство. Пусть, для определенности, к элементам первой строки прибавлены элементы второй строки, умноженные на k. Вычислим полученный определитель $|A'|$, используя свойства 8 и 6:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots. & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.$$

10. Определитель произведения двух квадратных матриц порядка n равен произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство. Докажем для матриц второго порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ \text{тогда}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

По свойству 8 имеем:

$$|AB|=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Первый и последний определители равны нулю по свойству 6, т. к. их строки пропорциональны. Для вычисления второго и третьего определителей воспользуемся свойствами 5 и 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}|B|,$$

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{21}|B|.$$

Таким образом,

$$|AB| = a_{11}a_{22}|B| - a_{12}a_{21}|B| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})|B| = |A| \cdot |B|.$$

Из этого свойства следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисления, особенно для определителей высоких порядков.

5.6. Вычисление определителей методом понижения порядка

Согласно определению, определитель четвертого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения, которые являются определителями третьего порядка. Поэтому вычисление определителя четвертого порядка сводится к вычислению четырех определителей третьего порядка.

Вычисление определителя пятого порядка сводится к вычислению пяти определителей четвертого порядка, а, следовательно, $5 \cdot 4 = 20$ определителей третьего порядка.

Вычисление определителя шестого порядка – шести определителей пятого порядка, $6 \cdot 20 = 120$ определителей третьего порядка, и т. д.

Такой способ вычисления очень трудоемкий и на практике, как правило, не используется. В то же время для определителей некоторого специального вида такие вычисления не представляют никакой сложности. Рассмотрим следующий пример.

Пример.

Вычислить определитель пятого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

В данном случае для разложения целесообразно выбрать вторую строку, так как наличие в ней четырех нулевых элементов дает возможность не вычислять соответствующие алгебраические дополнения. В результате получаем не 5, а всего 1 определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Теперь для разложения выберем по той же причине третью строку, в результате получаем не 4 определителя третьего порядка, а только один:

$$= -2 \cdot 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Полученный определитель можно вычислить любым способом, рассмотренным выше. Но быстрее всего получим результат, разложив определитель по элементам второй строки:

$$= -6 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 6.$$

Рассмотренный пример показывает, что если у определителя n-го порядка есть строка (или столбец), все элементы которой, за исключением одного, равны нулю, то раскладывая определитель по элементам этой строки (этого столбца), вместо n определителей (n – 1)-го порядка получаем всего один определитель (n – 1)-го порядка. Конечно, на практике определители такого вида встречаются редко. Поэтому для вычисления определителей высоких порядков рекомендуется применять **метод понижения порядка**, который заключается в следующем. Используя свойства определителей (в основном свойство 9), исходный определитель преобразуется так, чтобы в некоторой строке или столбце остался один отличный от нуля элемент. После этого определитель разлагается по элементам этой строки (или столбца), в результате чего порядок определителя понижается на единицу. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не получается определитель второго или третьего порядка, который вычисляется непосредственно.

Пример.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение.

Преобразуем определитель так, чтобы во второй строке все элементы, кроме единицы, стоящей в третьем столбце, обращались в 0. Для этого умножим элементы третьего столбца на (–2) и прибавим к соответствующим элементам первого столбца. Затем элементы того же третьего столбца умножим на (–1) и прибавим к элементам второго столбца. Третий столбец перепишем без изменения. Без изменения также перепишем четвертый столбец, т. к. его элемент, стоящий во второй строке, уже равен нулю. Получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

Раскладываем полученный определитель по элементам второй строки:

$$= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью таблицы Саррюса, однако можно продолжить упрощение определителя. «Обнулим» все элементы третьего столбца, за исключением стоящей в первой строке единицы. Для этого элементы первой строки определителя, предварительно умножив на (–2), прибавим к элементам второй строки. Затем элементы той же первой строки, умножив на 3, прибавим к элементам третьей строки. Первую строку перепишем без изменений:

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 13 & 5 & 0 \\ -16 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

Раскладывая по элементам третьего столбца, получаем:

$$= -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-65 + 80) = -15.$$

5.7. Обратная матрица

Как известно, для каждого числа $a \neq 0$ существует такое число a^{-1}, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Число a^{-1} называется обратным для a. Если рассматривать квадратные матрицы n-го порядка, то в этом множестве матриц единичная матрица E играет роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы A^{-1}, т. е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E. Этот вопрос и рассматривается в данном параграфе.

Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной матрицы A того же порядка, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Аналогично тому, как число $a = 0$ не имеет обратного, так и те квадратные матрицы, определитель которых равен нулю, также не имеют обратных. Действительно, из равенства $A \cdot A^{-1} = E$, пользуясь тем, что $|E| = 1$, получаем:

$$|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1.$$

С другой стороны, согласно свойству 10 определителей имеем:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|.$$

Таким образом, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, откуда вытекает $|A| \neq 0$ в случае существования для матрицы A обратной. Следовательно, если $|A| = 0$, то для A обратной матрицы не существует.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной или неособенной***, если $|A| \neq 0$, и ***вырожденной или особенной***, если $|A| = 0$.

Вырожденные матрицы, как только что было показано, обратных не имеют. Займемся изучением невырожденных матриц. Справедлива следующая теорема.

Теорема. У любой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Доказательство. **1**. Докажем существование обратной матрицы. Для этого рассмотрим следующую квадратную матрицу A^*, называемую ***присоединенной*** к A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

В строках матрица A^* расположены алгебраические дополнения A_{ij} элементов соответствующих столбцов матрицы A. Таким образом, для построения присоединенной матрицы A^* необходимо сначала заменить элементы a_{ij} на их алгебраические дополнения A_{ij}, а затем полученную матрицу транспонировать. Ясно, что понятие присоединенной матрицы имеет смысл для любой квадратной матрицы (как вырожденной, так и невырожденной). Вычислим произведение $A \cdot A^*$:

$$B = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & A_{j1} & \dots \\ \dots & A_{j2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & A_{jn} & \dots \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что в j-м столбце матрицы A^* стоят алгебраические дополнения элементов j-й строки матрицы A). По правилу умножения матриц для элементов b_{ij} матрицы B имеем:

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Но согласно свойству 7 определителей правая часть полученного равенства равна нулю при $i \neq j$. В случае же $i = j$, согласно определению, мы получаем $|A|$ (разложение определителя по элементам i-й строки).

Следовательно,

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому матрица B является диагональной, причем элементы её главной диагонали равны определителю исходной матрицы:

$$B = A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E.$$

Аналогично проверяется равенство $A^* \cdot A = |A| \cdot E$. Таким образом, установлено основное свойство присоединенной матрицы A^*:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot E.$$

Так как по условию теоремы A – невырожденная матрица ($|A| \neq 0$), то, разделив, это равенство на $|A|$, получим:

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot A^* \right) = \left(\frac{1}{|A|} \cdot A^* \right) \cdot A = E .$$

Следовательно, согласно определению обратной матрицы,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* .$$

Этим мы установили, что любая невырожденная матрица A имеет обратную.

2. Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что у матрицы A существует ещё одна обратная матрица B:

$$A \cdot B = B \cdot A = E.$$

Рассмотрим равенство $A \cdot B = E$ и умножим его слева на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot E.$$

Так как $A^{-1} \cdot A \cdot B = E \cdot B = B$ и $A^{-1} \cdot E = A^{-1}$, то получаем $B = A^{-1}$, т. е., если обратная матрица существует, то она единственна.

В процессе доказательства теоремы был указан возможный ***алгоритм вычисления обратной матрицы***:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}.

2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A.

3. Составляем присоединенную матрицу A^*, располагая алгебраические дополнения элементов i-й строки матрицы A в i-м столбце матрицы A^*.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* .$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, исходя из её определения.

Пример. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Находим $|A|$, разлагая определитель по элементам первого столбца:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)-3\cdot(-4)=10\neq 0$$

т. е. матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2.$$

3. Составляем присоединенную матрицу:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}4 \\ 0{,}6 & -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

5. Делаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A\cdot A^{*}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2+18-6 & -2-12+14 & -8+12-4 \\ 0+6-6 & 0-4+14 & 0+4-4 \\ 3-6+3 & 3+4-7 & 12-4+2 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=E.$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$, 3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, 4. $\left(A^{m}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{m}$.

Эти свойства легко проверить, используя определение обратной матрицы и свойство 10 определителей. Отметим, что свойство 3 справедливо и в случае произвольного числа сомножителей. Например, если A, B и C – три невырожденные матрицы n-го порядка, то $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Что понимается под операцией транспонирования матрицы? Существует ли транспонированная матрица для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?
3. По какому правилу складываются матрицы? Можно ли сложить две матрицы с размерностями 2×3 и 3×1?
4. Можно ли из одной матрицы вычесть другую? Как это сделать? Каким условиям должны удовлетворять при этом матрицы? Какую размерность имеет матрица, являющаяся результатом этой операции?
5. Как умножаются матрицы? Можно ли умножить матрицу размерности 2×3 на матрицу такой же размерности?
6. Какая размерность матрицы A, если известно, что $(1 \quad 3 \quad 5) \cdot A = (-1 \quad 2)$?
7. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
8. Какая матрица выполняет роль единицы в операции умножения матриц n-го порядка?
9. Существует ли определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$?
10. Что такое правило треугольников? Как вычислить определитель третьего порядка, используя таблицу Саррюса?
11. Что такое минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij}?
12. Как вводится понятие определителя n-го порядка?
13. В чем суть метода понижения порядка, применяемого для вычисления определителей?
14. Какая матрица называется обратной для данной матрицы A?
15. Для каких матриц существует обратная матрица A^{-1}?
16. Какой алгоритм нахождения обратной матрицы?

Глава 6. Системы линейных алгебраических уравнений

6.1. Основные понятия и формы записи

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В общем случае такую систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Такая форма записи называется ***развернутой***.

Иногда бывает удобно использовать другие более компактные формы записи. Например, при помощи знака суммы систему можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \quad i = \overline{1,\ m}\,.$$

Наряду с этим используется ***матричная форма*** записи системы уравнений. Обозначим через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных, через X вектор-столбец из неизвестных, через B вектор-столбец правых частей системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде:

$$AX = B.$$

Система линейных алгебраических уравнений называется ***однородной***, если $b_i = 0,\ i = \overline{1,\ m}$. В матричной форме однородная система записывается в виде:

$$AX = 0.$$

Решением системы линейных уравнений называется совокупность значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая, будучи подставленной в уравнения системы, обращает все их в тождества. Система линейных алгебраических уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется ***несовместной***.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение. Если же система уравнений имеет более одного решения, она называется ***неопределенной***. Однородная система уравнений всегда совместна, так как вектор $X = 0$ является ее решением при любых коэффициентах при неизвестных в левой части уравнений.

Рассмотрим простейшие примеры.

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

является совместной, причем определенной, т. к. имеет единственное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений. Действительно, второе уравнение этой системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число 2. Поэтому система состоит фактически из одного уравнения $2x_1 + x_2 = 4$ с двумя неизвестными. Запишем это уравнение в виде $x_2 = 4 - 2x_1$. Придавая x_1 произвольное значение $x_1 = c$, получаем $x_2 = 4 - 2c$. Таким образом, при любом значении c $x_1 = c$, $x_2 = 4 - 2c$ является решением системы.

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

является несовместной, т. к. левые части уравнений одинаковые, а правые части отличаются. Следовательно, никакие значения x_1 и x_2 не могут одновременно удовлетворять обоим уравнениям.

6.2. Формулы Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6.1}$$

Матрица A системы уравнений имеет n строк и n столбцов, т. е. является квадратной матрицей n-го порядка. Обозначим через $|A|$ определитель матрицы A, через B вектор-столбец правых частей системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножим левую и правую часть каждого из уравнений системы (6.1) последовательно на алгебраические дополнения A_{11}, A_{21}, …, A_{n1} элементов первого столбца определителя $|A|$ и сложим все полученные левые и правые части. В результате получим:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \dots +$$

$$+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \qquad (6.2)$$

Коэффициент, стоящий при x_1, равен $|A|$ как сумма произведений элементов первого столбца определителя $|A|$ на их алгебраические дополнения. Коэффициенты же при x_2, x_3, …, x_n все равны нулю как суммы произведений элементов второго, третьего, …, n-го столбцов определителя $|A|$ на алгебраические дополнения элементов первого столбца (свойство 7 определителя).

Рассмотрим выражение $(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1})$, стоящее в правой части равенства (6.2) и сравним его с коэффициентом при x_1.

Очевидно, что правая часть отличается от коэффициента при x_1 только тем, что вместо a_{11}, a_{21}, …, a_{n1} поставлены b_1, b_2, …, b_n. Поэтому можно сказать, что правая часть равенства (6.2) является определителем, который получается из определителя системы $|A|$ заменой его первого столбца на столбец B правых частей системы уравнений (6.1).

Обозначим этот определитель через Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство (6.2) запишется в виде:

$$|A| \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = \Delta_1, \text{ т. е.}$$
$$|A| \cdot x_1 = \Delta_1.$$

Аналогичным образом умножаем теперь левую и правую часть каждого из уравнений системы (6.1) последовательно на алгебраические дополнения A_{12}, A_{22}, …, A_{n2} элементов второго столбца определителя $|A|$ и складываем все полученные левые и правые части. В результате получаем:

$$0 \cdot x_1 + |A| \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}, \text{ т.е.}$$

$$|A| \cdot x_2 = \Delta_2,$$

где Δ_2 – определитель, который получается из определителя системы $|A|$ заменой его второго столбца на столбец B правых частей системы уравнений:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжаем этот процесс, умножая последовательно на алгебраические дополнения элементов 3-го, 4-го, … n-го столбцов определителя $|A|$. Объединяя полученные равенства, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} |A| \cdot x_1 = \Delta_1, \\ |A| \cdot x_2 = \Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |A| \cdot x_n = \Delta_n. \end{cases} \tag{6.3}$$

Если $|A| \neq 0$, то из системы (6.3) получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}. \tag{6.4}$$

Формулы (6.4) называют ***формулами Крамера***. Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема Крамера

Если определитель $|A|$ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение. Это решение может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{|A|},$$

где Δ_k – определитель, получающийся из определителя $|A|$ заменой его k-го столбца на столбец правых частей системы.

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Вычисляем определитель системы $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6-4-2-4-1+12 = -5.$$

Определитель $|A| \neq 0$, поэтому система уравнений имеет единственное решение. Находим решение системы по формулам Крамера. Для этого вычисляем Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15.$$

Следовательно:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{5}{-5} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{15}{-5} = -3.$$

Итак, получено решение системы уравнений

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3.$$

6.3. Решение систем уравнений при помощи обратной матрицы

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1, n}.$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$AX = B,$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, X – вектор-столбец из неизвестных, B – вектор-столбец правых частей системы.

Предположим, что определитель $|A| \neq 0$, т. е. матрица системы A является невырожденной. Тогда для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части равенства $AX = B$ слева на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. По определению обратной матрицы $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица порядка n. Следовательно, получаем $EX = A^{-1}B \quad \Rightarrow$

$$X = A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить систему уравнений при помощи обратной матрицы, необходимо найти обратную матрицу A^{-1} и умножить ее на столбец B правых частей системы.

Пример.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Для рассматриваемой системы уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как определитель $|A| \neq 0$, существует обратная матрица A^{-1}. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = -17, \qquad A_{21} = 7, \qquad A_{31} = -13,$$

$$A_{12} = 8, \qquad A_{22} = -8, \qquad A_{32} = 8,$$

$$A_{13} = -5, \qquad A_{23} = 3, \qquad A_{33} = -1.$$

Тогда $\quad A^{-1} = -\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -17 & 7 & -13 \\ 8 & -8 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Находим решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -17 & 7 & -13 \\ 8 & -8 & 8 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -32 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие формы записи линейных систем уравнений Вам известны?
2. Что называется решением системы уравнений?
3. Какие системы уравнений называются совместными, несовместными? Приведите примеры.
4. В каком случае совместную систему уравнений называют определенной, неопределенной? Приведите примеры.
5. Какие системы уравнений называются однородными? Может ли однородная система быть несовместной и почему?
6. Какие системы уравнений можно решить по формулам Крамера?
7. Сформулируйте теорему Крамера.
8. Что можно сказать о системе уравнений, если определитель системы равен нулю?
9. Какие системы уравнений можно решить с помощью обратной матрицы? По какой формуле в этом случае ищется решение?

Глава 7. Метод полного исключения и его приложения

7.1. Идея метода полного исключения

Будем рассматривать произвольные системы m линейных уравнений с n неизвестными. Одними из самых распространенных методов решения таких систем являются методы исключения (методы Гаусса). Все они основаны на возможности сохранения некоторой неизвестной в одном из уравнений и исключении ее из других уравнений, используя элементарные (эквивалентные) преобразования системы уравнений.

Элементарными преобразованиями системы называются следующие преобразования:

1) умножение (деление) обеих частей одного из уравнений на любое, отличное от нуля, число;

2) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на любое число.

Элементарные преобразования переводят систему уравнений в эквивалентную (равносильную) ей.

Две системы называются ***эквивалентными***, если они имеют одно и то же множество решений. Все несовместные системы считаются эквивалентными.

Заметим также, что если в системе уравнений есть хотя бы одно уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a \qquad (a \neq 0), \tag{7.1}$$

то такая система несовместна.

Если же в системе уравнений есть уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0, \tag{7.2}$$

то все такие уравнения можно отбросить. Полученная после этого система (содержащая уже меньше уравнений) будет эквивалентна исходной.

Перейдем к описанию ***метода полного исключения*** (метод Жордана-Гаусса). Метод состоит из конечного числа однотипных шагов, каждый из которых заключается в следующем:

1. Выбирается некоторое уравнение, которое называется ***ведущим уравнением***, и некоторая неизвестная, которая называется ***ведущей неизвестной***. Ведущим уравнением может быть любое уравнение системы, которое не было ведущим на предыдущих шагах. Ведущей неизвестной может быть любая неизвестная, которая входит в ведущее уравнение с коэффициентом, отличным от нуля. Коэффициент при ведущей неизвестной называется ***ведущим коэффициентом***.

2. Ведущее уравнение делится на ведущий коэффициент.

3. Из всех остальных уравнений системы с помощью элементарных преобразований исключается ведущая неизвестная. Для этого к каждому уравнению системы прибавляется ведущее уравнение, умноженное на соответствующим образом подобранное число. Если при этом некоторое уравнение системы преобразуется в уравнение вида (7.2), то оно отбрасывается (наличие уравнений вида (7.2) свидетельствует о том, что соответствующие им уравнения исходной системы являются линейными комбинациями тех уравнений системы, которые уже были ведущими). Если же некоторое уравнение системы преобразуется в уравнение вида (7.1), то система несовместна и вычисления на этом прекращаются.

В случае, когда уравнения вида (7.1) не появились, переходят к следующему шагу, т. е. снова выбирают ведущее уравнение, ведущую неизвестную и т. д. В случае совместной системы преобразования продолжают до тех пор, пока не получат систему, в которой все уравнения уже были ведущими. По этой последней системе записывают решение исходной системы уравнений.

Пример.

Решить методом полного исключения систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ -x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

Решение. **Шаг 1.** На первом шаге возьмем первое уравнение и переменную x_1 в качестве ведущих. Такой выбор связан с тем, что в этом случае ведущим коэффициентом будет единица и, следовательно, делить ведущее уравнение на ведущий коэффициент нет необходимости. Кроме того, во втором и четвертом уравнениях неизвестной x_1 нет и, следовательно, эти уравнения в преобразованиях не нуждаются. Таким образом, первое, второе и четвертое уравнения просто переписываем. Из третьего уравнения исключаем неизвестную x_1. Для этого умножаем ведущее (первое) уравнение на (–2) и прибавляем к третьему уравнению. Получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5, \\ -x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -4. \end{cases}$$

Шаг 2. На втором шаге выберем в качестве ведущих четвертое уравнение и неизвестную x_5. Для исключения ведущей неизвестной из первого уравнения прибавляем к нему ведущее уравнение. Затем, умножив ведущее уравнение на (–1) и прибавив его ко второму уравнению, исключаем неизвестную x_5 из второго уравнения. Преобразовывать третье уравнение нет необходимости, так как оно не содержит ведущую неизвестную. И, наконец, ведущее (четвертое) уравнение делим на ведущий элемент, т. е. на (–1). Получаем:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 + \ \ x_4 \qquad = -2, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 - \ \ x_4 \qquad = \ \ 5, \\ -3x_2 + 5x_3 + \ \ x_4 \qquad = -5, \\ \quad x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 = \ \ 4. \end{cases}$$

Шаг 3. На третьем шаге выберем третье уравнение и неизвестную x_4 в качестве ведущих. Умножим третье уравнение на (–1) и прибавим к первому, затем третье уравнение прибавим ко второму. Ведущее (третье) уравнение перепишем без изменений, т.к. ведущий коэффициент равен единице. И, наконец, умножив ведущее уравнение на 2, прибавим его к четвертому уравнению. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 \qquad\qquad = \ \ 3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = \ \ 0, \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad = -5, \\ -5x_2 + 6x_3 \qquad + x_5 = -6. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что второе уравнение является линейной комбинацией остальных и поэтому может быть отброшено. Преобразования системы завершены, так как каждое из трех оставшихся уравнений уже было ведущим. В полученной системе уравнений меньше, чем неизвестных. Как будет показано ниже, такие системы имеют бесконечное множество решений, т. е. являются неопределенными. Введем ряд определений, используемых при решении систем уравнений такого вида.

Неизвестные, которые выбирались ведущими, называются ***базисными неизвестными***, а остальные – ***свободными***.

В нашем примере базисными являются неизвестные x_1, x_4 и x_5, а свободными – x_2 и x_3.

Общим решением системы уравнений называется решение, в котором базисные неизвестные выражены через свободные.

Из последней системы выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_2 + 3x_3, \\ x_4 = -5 + 3x_2 - 5x_3, \\ x_5 = -6 + 5x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

и запишем общее решение системы уравнений:

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} 3 - 3x_2 + 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -5 + 3x_2 - 5x_3 \\ -6 + 5x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Если в общем решении придать свободным неизвестным какие-либо значения, то полученное решение называется ***частным решением***.

Пусть, например, $x_2 = x_3 = 1$. Тогда частным решением системы будет

$$X_{част} = (3, 1, 1, –7, –7).$$

Очевидно, что значения для свободных неизвестных можно выбрать бесконечным числом способов, поэтому полученная система уравнений (а, следовательно, и эквивалентная ей исходная система уравнений) имеет бесконечное множество решений.

Если все свободные неизвестные равны нулю, то такое частное решение называется ***базисным решением***.

В рассматриваемом примере

$$X_{баз} = (3, 0, 0, –5, –6).$$

Сделаем проверку правильности найденного решения системы уравнений. В случае неопределенной системы такая проверка делается упрощенно. С этой целью берется какое-нибудь частное решение и подставляется во все уравнения исходной системы. Базисное решение для проверки не используется, так как оно содержит нули и в связи с этим достоверность такой проверки существенно уменьшается.

Сделаем проверку в нашем примере с помощью найденного выше $X_{част} = (3, 1, 1, –7, –7)$. Подставляя это решение в уравнения исходной системы, убеждаемся, что все они обращаются в тождества:

$$\begin{cases} 3 + 1 - 2\cdot 1 - (-7) + (-7) = 2, \\ 2\cdot 1 - 1 + (-7) - (-7) = 1, \\ 2\cdot 3 - 1 + 1 - (-7) + 2\cdot(-7) = -1, \\ -1 + 4\cdot 1 + 2\cdot(-7) - (-7) = -4. \end{cases}$$

7.2. Табличный вариант метода полного исключения

Обратим внимание на тот факт, что все преобразования, которым подвергалось любое уравнение системы при решении ее методом полного исключения, проводятся только над коэффициентами этого уравнения и его правой частью, а неизвестные только приписываются. Это позволяет вместо системы уравнений использовать матрицу системы *A* и столбец правых частей *B*, и проводить все необходимые преобразования не с уравнениями системы, а со строками этих матриц. Все вычисления удобно оформлять в виде таблицы. Рассмотрим, как это происходит, на примере, решенном в предыдущем параграфе.

Пример 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 = 2, \\ \qquad 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 = 1, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 + 2x_5 = -1, \\ \quad\ - \ \ x_2 + 4x_3 + 2x_4 - \ \ x_5 = -4. \end{cases}$$

Решение.

Составим начальную таблицу, записав коэффициенты при неизвестных до черты, а после нее – правые части уравнений системы. Для контроля вычислений добавим еще один столбец $\sum$, элементами которого являются суммы элементов соответствующей строки, включая соответствующий элемент столбца B. Таким образом, исходная таблица имеет вид:

		A			*B*	$\sum$
1	1	–2	–1	1	2	2
0	2	–1	1	–1	1	2
2	–1	1	–1	2	–1	2
0	–1	4	2	–1	–4	0

Обратим внимание, что если какую-либо строку исходной таблицы (включая соответствующие элементы столбцов B и $\sum$) разделить или умножить на некоторое число, то у преобразованной строки сумма элементов (включая соответствующий элемент столбца B) будет равна соответствующему преобразованному элементу столбца $\sum$. Аналогичная ситуация возникает и в том случае, когда к какой-либо строке таблицы прибавить другую строку, умноженную на произвольное число, т. е. и в этом случае сумма элементов преобразованной строки (включая элемент столбца B) будет равна соответствующему преобразованному элементу столбца $\sum$. Это позволит в дальнейшем использовать контрольный столбец $\sum$ в качестве эффективного средства текущего контроля правильности вычислений.

Опишем подробно каждый шаг метода полного исключения. Вместо слов «ведущее уравнение» будем использовать слова «ведущая строка», вместо слов «ведущая неизвестная» и «ведущий коэффициент» – «ведущий столбец» и «ведущий элемент» соответственно.

Шаг 1. На первом шаге ведущими выбраны: первая строка, первый столбец и элемент 1, стоящий на их пересечении. Для наглядности ведущий элемент в таблице обведен кружком. Так как ведущий элемент равен единице, то делить ведущую строку на ведущий элемент нет необходимости; переписываем эту строку в новую таблицу. Вторую и четвертую строки также переписываем без изменений, т. к. они уже содержат нули в ведущем столбце. В преобразовании нуждается только третья строка, содержащая 2 в ведущем столбце. Для «зануления» этой двойки ведущую (первую) строку умножаем на (–2) и прибавляем к третьей строке; полученную строку записываем в таблицу. В результате получаем следующую таблицу:

1	1	–2	–1	1	2	2
0	2	–1	1	–1	1	2
0	–3	5	1	0	–5	–2
0	–1	4	2	–1	–4	0

Задача первого шага – «зануление» ведущего (первого) столбца – выполнена. Проверяем правильность вычислений с помощью контрольного столбца. Для этого находим суммы элементов каждой строки, расположенных до двойной черты:

$$1 + 1 - 2 - 1 + 1 + 2 = 2,$$
$$0 + 2 - 1 + 1 - 1 + 1 = 2,$$
$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = -2,$$
$$0 - 1 + 4 + 2 - 1 - 4 = 0.$$

Так как все суммы совпадают с соответствующими элементами контрольного столбца (элементами, стоящими после двойной черты), то можно переходить ко второму шагу. Если бы в некоторой строке вычисленная сумма не совпала с элементами контрольного столбца, то это означало бы, что при вычислении элементов этой строки была допущена ошибка, которую необходимо найти и исправить, прежде чем переходить к следующему шагу.

Шаг 2. На втором шаге в качестве ведущих выбраны четвертая строка, пятый столбец и элемент (–1), который обведен кружком. «Зануляем» элементы ведущего столбца. Для этого к первой строке прибавляем ведущую строку, а затем ко второй строке прибавляем ведущую строку, умноженную на (–1). Третью строку, содержащую ноль в ведущем столбце, просто переписываем.

Ведущую строку делим на ведущий элемент, т. е. на (–1). Получаем следующую таблицу:

1	0	2	1	0	–2	2
0	3	–5	–1	0	5	2
0	–3	5	1	0	–5	–2
0	1	–4	–2	1	4	0

Проверяем правильность вычислений:

$$1 + 0 + 2 + 1 + 0 - 2 = 2,$$

$$0 + 3 - 5 - 1 + 0 + 5 = 2,$$

$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = -2,$$

$$0 + 1 - 4 - 2 + 1 + 4 = 0.$$

Все суммы совпадают с элементами контрольного столбца, поэтому можно переходить к третьему шагу.

Шаг 3. На третьем шаге в качестве ведущих выбраны третья строка, четвертый столбец, элемент 1. «Зануляем» элементы ведущего столбца. Для этого ведущую строку умножаем на (–1) и прибавляем к первой строке, затем ведущую строку прибавляем ко второй строке и, наконец, умножив ведущую строку на 2, прибавляем ее к четвертой строке. Ведущую третью строку переписываем без изменений (так как ведущий элемент равен 1). Получаем таблицу:

1	3	–3	0	0	3	4
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	–3	5	1	0	–5	–2
0	–5	6	0	1	–6	–4

Вторую строку, состоящую из одних нулей, вычеркиваем, т. к. она соответствует уравнению (7.2). Отметим, что вычеркнуть вторую строку можно было еще в предыдущей таблице, т. к. она была пропорциональна третьей строке, что означает эквивалентность соответствующих уравнений.

Проверяем:

$$1 + 3 - 3 + 0 + 0 + 3 = 4,$$

$$0 - 3 + 5 + 1 + 0 - 5 = -2,$$
$$0 - 5 + 6 + 0 + 1 - 6 = -4.$$

Все суммы совпадают с элементами контрольного столбца. Так как все строки уже были ведущими, то преобразования таблицы на этом заканчиваются. В последней таблице обводим кружками все те единицы, которые соответствуют ведущим элементам всех шагов:

1	3	–3	0	0	3	4
0	–3	5	1	0	–5	–2
0	–5	6	0	1	–6	–4

Базисные неизвестные – x_1, x_4, x_5 – отвечают столбцам, которые выбирались в качестве ведущих, т. е. столбцам с обведенными единицами. По последней таблице выписывается сначала соответствующая ей система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 = -5, \\ -5x_2 + 6x_3 + x_5 = -6, \end{cases}$$

а затем так, как это было сделано в предыдущем параграфе, общее решение системы.

Отметим, что при решении систем табличным вариантом метода полного исключения таблицы удобно записывать последовательно друг под другом.

Подведем итог изложенному выше.

Для решения системы линейных уравнений табличным вариантом метода полного исключения необходимо:

1. Заполнить исходную таблицу, записав в нее коэффициенты при неизвестных и правые части уравнений системы. Подсчитать столбец контрольных сумм.

2. Проделать серию однотипных шагов, на каждом из которых:

а) выбирается некоторый отличный от нуля элемент таблицы, который называется ***ведущим элементом***. Строка и столбец, на пересечении которых расположен ведущий элемент, называется ***ведущей строкой*** и ***ведущим столбцом***. Ведущим элементом может быть любой ненулевой элемент (стоящий до первой черты) любой строки, которая еще не была ведущей;

б) ведущая строка делится на ведущий элемент, в результате чего на месте ведущего элемента появляется единица;

в) все остальные элементы ведущего столбца обращаются в ноль. Для этого к каждой строке таблицы прибавляется ведущая строка, умноженная на соответствующим образом подобранное число. При этом после каждой вновь вычисленной строки осуществляется контроль правильности вычислений с помощью контрольного столбца;

г) возникающие в процессе вычисления строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad 0 \quad \| \quad 0$$

вычеркиваются;

д) строки вида

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad a \quad \| \quad a, \qquad \text{где } a \neq 0$$

означают несовместность системы и вычисления на этом прекращаются.

3. Закончить процесс заполнения таблицы, если уже нет таких строк, которые не были бы ранее ведущими. По результатам последней таблицы записать решение системы.

Рассмотрим еще несколько примеров решения систем табличным вариантом метода полного исключения. Объяснения будут менее подробными по сравнению с предыдущими.

Пример 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем исходную таблицу. Остальные таблицы будем записывать последовательно друг под другом. Ведущие элементы каждого шага обведены кружком. В последней таблице кружками обведены все единицы, соответствующие ведущим элементам всех шагов.

1	2	–2	7	8
1	–1	–1	0	–1
2	1	1	3	7
1	2	–2	7	8
0	–3	1	–7	–9
0	–3	5	–11	–9

1	–4	0	–7	–10
0	–3	1	–7	–9
0	12	0	24	36
1	–4	0	–7	–10
0	–3	1	–7	–9
0	1	0	2	3
1	0	0	1	2
0	0	1	–1	0
0	1	0	2	3

На первом шаге ведущим элементом выбрана 1, стоящая в первой строке и первом столбце. После этого ведущую (первую) строку переписали, и затем, умножив последовательно на (–1) и (–2), прибавили соответственно ко второй и третьей строкам.

На втором шаге ведущей выбрана единица, стоящая во второй строке и третьем столбце. Ведущая (вторая) строка умножалась последовательно на 2 и (–5) и прибавлялась соответственно к первой и третьей строкам. Вторая строка была переписана без изменений.

Прежде чем делать третий шаг, все элементы третьей строки разделили на 12. Как было отмечено в предыдущем параграфе, деление любого уравнения (а, следовательно, любой строки таблицы) на отличное от нуля число переводит систему уравнений в эквивалентную ей систему. Поэтому на любом шаге целесообразно делать такие преобразования с теми строками, все элементы которых кратны некоторым числам.

На третьем шаге ведущий элемент – единица, стоящая в третьей строке и втором столбце. Ведущую (третью) строку умножили последовательно на 4 и 3, и прибавили к первой и второй строкам соответственно. Третью строку переписали.

Из последней таблицы находим:

$x_1 = 1$, $x_3 = –1$, $x_2 = 2$.

Таким образом, данная система уравнений определенная и ее решение имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

$$\begin{cases} 1+2\cdot 2-2\cdot(-1)=7, \\ 1-2-(-1)=0, \\ 2\cdot 1+2+(-1)=3. \end{cases}$$

Все уравнения обратились в тождества. Следовательно, система решена верно.

Пример 3.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-\ \ x_4=-1, \\ 2x_1+\ \ x_2+x_3-3x_4=1, \\ -3x_1-4x_2-x_3+5x_4=3. \end{cases}$$

Решение.

1	–2	1	–1	–1	–2
2	1	1	–3	1	2
–3	–4	–1	5	3	0
1	–2	1	–1	–1	–2
1	3	0	–2	2	4
–2	–6	0	4	2	–2
0	–5	1	1	–3	–6
1	3	0	–2	2	4
0	0	0	0	6	6

Система несовместна, так как в третьей строке последней таблицы все элементы до черты равны нулю, а после черты стоит 6, т.е. третья строка эквивалента уравнению (7.1).

7.3. Формулы полного исключения

Табличный вариант метода полного исключения позволяет в значительной степени формализовать и тем самым упростить нахождение решения системы линейных уравнений. Процесс вычислений можно формализовать еще в большей степени, выписав формулы, по которым преобразуются элементы таблицы в результате одного шага метода полного исключения.

Рассмотрим таблицы двух последовательных шагов. Обозначим a_{ij}, b_i – элементы исходной таблицы, а a'_{ij}, b'_i – элементы таблицы следующего шага. Пусть a_{pk} – ведущий элемент исходной таблицы. Тогда таблицы этих шагов будут иметь следующий вид:

. . . .	…	…
. . . . . a_{pk} . . . . . . a_{pj} . . .	b_p	$\sum_p$
. . . .	…	…
. . . . . a_{ik} . . . . . . a_{ij} . . .	b_i	$\sum_i$
. . . .	…	…
. . . .	…	…
. . . . . 1 . . . . a'_{pj} . . .	b'_p	$\sum'_p$
. . . .	…	…
. . . . . 0 . . . . a'_{ij} . . .	b'_i	$\sum'_i$
. . . .	…	…

Наша задача: написать формулы, которые позволят по элементам исходной таблицы, зная ведущий элемент, выписать элементы таблицы следующего шага.

Ведущая строка, как известно, преобразуется путем деления на ведущий элемент. Следовательно, для преобразованных элементов p-ой (ведущей) строки получаем:

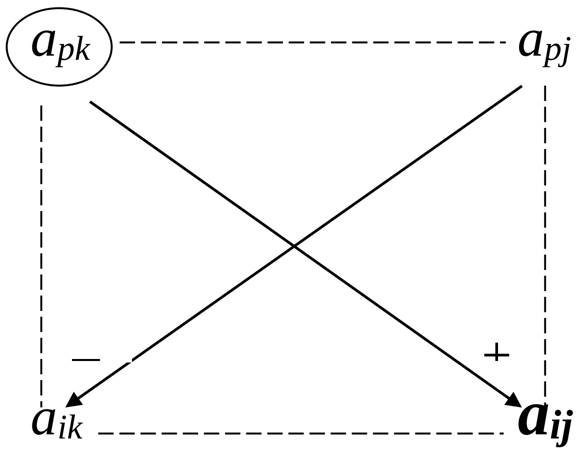
$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pk}}, \quad b'_p = \frac{b_p}{a_{pk}}. \tag{7.3}$$

Для того, чтобы занулить элемент a_{ik} ведущего столбца, к элементам i-ой строки прибавляем соответствующие элементы p-ой строки, умноженные на $\left(-\dfrac{a_{ik}}{a_{pk}}\right)$. Следовательно, для преобразованных элементов i-ой (не ведущей) строки получаем:

$$a'_{ij} = a_{ij} + a_{pj} \cdot \left(-\frac{a_{ik}}{a_{pk}} \right) = \frac{a_{pk}a_{ij} - a_{pj}a_{ik}}{a_{pk}},$$
$$b'_i = b_i + b_p \cdot \left(-\frac{a_{ik}}{a_{pk}} \right) = \frac{a_{pk}b_i - b_p a_{ik}}{a_{pk}}. \qquad (7.4)$$

Полученные формулы (7.3) и (7.4) называются ***формулами полного исключения***. Последовательное применение этих формул дает возможность решать методом полного исключения любые системы линейных уравнений.

Для запоминания формул (7.4) рекомендуется использовать следующую схему, иллюстрирующую преобразование элемента a_{ij} исходной таблицы:



Так как все элементы схемы образуют прямоугольник, то правило пересчета элементов таблицы получило название правила прямоугольника.

Правило прямоугольника.

Для того, чтобы пересчитать по формулам полного исключения произвольный элемент таблицы, не стоящий в ведущей строке и ведущем столбце, необходимо:

1) умножить его на ведущий элемент;

2) из полученного произведения вычесть произведение двух других элементов таблицы, дополняющих исходный и ведущий элементы до прямоугольника;

3) разделить результат на ведущий элемент.

Используя формулы полного исключения при построении новой таблицы, вычисления можно вести не только по строкам (как это делалось ранее), но и по столбцам, и, вообще, в любом удобном (по каким-либо соображениям) порядке.

Как уже неоднократно отмечалось, если в ведущем столбце есть нулевые элементы, то соответствующие им строки в следующую таблицу переносятся без изменений. Это же формально следует из формул полного исключения (7.4):

$$\text{если } a_{ik} = 0, \text{ то } a'_{ij} = \frac{a_{pk}a_{ij}}{a_{pk}} = a_{ij}.$$

Обратим внимание, что аналогичная ситуация возникает и в том случае, когда ведущая строка содержит нули:

$$\text{если } a_{pj} = 0, \text{ то } a'_{ij} = a_{ij},$$

т. е. если в ведущей строке есть нули, то соответствующие им столбцы переносятся в следующую таблицу без изменений. Поэтому, приступая к преобразованию таблицы, целесообразно вначале перенести в следующую таблицу те строки и столбцы, элементы которых не нуждаются в преобразованиях, и только после этого приступить к заполнению оставшихся пустых мест, т. е. вычислить те элементы, места которых в новой таблице еще не заняты. Такой порядок вычислений оказывается весьма удобным, особенно в том случае, когда в таблице много нулей, например (как будет показано ниже) при нахождении обратной матрицы.

Отметим также, что при преобразовании таблицы по формулам полного исключения элементы контрольного столбца $\sum'_i$ и $\sum'_p$ пересчитываются по этим же формулам.

Подведем итог изложенному выше.

Для преобразования таблицы по формулам полного исключения, необходимо:

1. Разделить ведущую строку на ведущий элемент.

2. Заполнить нулями ведущий столбец.

3. Если исходный ведущий столбец содержит нули, то соответствующие им строки перенести в следующую таблицу без изменений.

4. Если ведущая строка содержит нули, то соответствующие им столбцы перенести без изменений.

5. По правилу прямоугольника заполнить все оставшиеся пустыми места таблицы.

Пример.

Решить методом полного исключения систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -1, \\ \qquad\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение.
Составим исходную таблицу:

1	2	0	–1	2	0	4
2	–1	1	–2	–1	–1	–2
0	1	–2	2	1	4	6

Шаг 1. Выберем ведущим элементом единицу, стоящую в первой строке и первом столбце. Перепишем первую строку без изменения и заполним ведущий (первый) столбец нулями:

1	2	0	–1	2	0	4
0						
0						

Так как исходный ведущий столбец содержит ноль, то соответствующую ему третью строку перепишем без изменений. Так как ведущая строка содержит два нуля, то соответствующие им столбцы также перепишем без изменений:

1	2	0	–1	2	0	4
0		1			–1	
0	1	–2	2	1	4	6

Четыре места в таблице остались пустыми. Для их заполнения составим в исходной таблице четыре прямоугольника и произведем расчеты по правилу прямоугольника:

1	2	0	–1	2	0	4
2	–1	1	–2	–1	–1	–2
0	1	–2	2	1	4	6

$$a'_{22} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2}{1} = -5.$$

1	2	0	–1	2	0	4
2	–1	1	–2	–1	–1	–2
0	1	–2	2	1	4	6

$$a'_{24} = \frac{1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2}{1} = 0.$$

1	2	0	–1	2	0	4
2	–1	1	–2	–1	–1	–2
0	1	–2	2	1	4	6

$$a'_{25} = \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2}{1} = -5.$$

1	2	0	–1	2	0	4
2	–1	1	–2	–1	–1	–2
0	1	–2	2	1	4	6

$$\sum\nolimits'_2 = \frac{1 \cdot (-2) - 4 \cdot 2}{1} = -10.$$

Таким образом, таблица полностью заполнена и имеет вид:

1	2	0	–1	2	0	4
0	–5	1	0	–5	–1	–10
0	1	–2	2	1	4	6

Шаг 2. Ведущий элемент – единица, стоящая во второй строке и третьем столбце. Перепишем вторую строку, третий столбец заполним нулями:

		0				
0	–5	1	0	–5	–1	–10
		0				

Так как исходный ведущий столбец содержит ноль, то соответствующую ему первую строку перепишем без изменений. Так как ведущая строка содержит два нуля, то соответствующие им первый и четвертый столбец также перепишем без изменений:

1	2	0	–1	2	0	4
0	–5	1	0	–5	–1	–10
0			2			

Заполним по правилу прямоугольника пустые места таблицы:

1	2	0	–1	2	0	4
0	–5	1	0	–5	–1	–10
0	–9	0	2	–9	2	–14

Шаг 3. Ведущий элемент – элемент 2 в третьей строке и четвертом столбце. Ведущую третью строку разделим на 2, четвертый столбец заполним нулями:

			0			
			0			
0	$-\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{9}{2}$	1	–7

Без изменений переписываем вторую строку, а также первый и третий столбцы:

1		0	0			
0	–5	1	0	–5	–1	–10
0	$-\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{9}{2}$	1	–7

Заполняем оставшиеся пустые места по правилу прямоугольника.

1	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	1	–3
0	–5	1	0	–5	–1	–10
0	$-\frac{9}{2}$	0	1	$-\frac{9}{2}$	1	–7

По последней таблице выписываем ответ:

$$X_{общ} = \begin{pmatrix} 1+\frac{5}{2}x_2+\frac{5}{2}x_5 \\ x_2 \\ -1+5x_2+5x_5 \\ 1+\frac{9}{2}x_2+\frac{9}{2}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

7.4. Решение систем уравнений, отличающихся правыми частями

Пусть необходимо решить несколько систем уравнений с одной и той же матрицей системы и разными правыми частями:

$$AX = B_1, \qquad AX = B_2, \qquad \ldots, \qquad AX = B_k.$$

Так как ведущими элементами в методе полного исключения могут быть только элементы матрицы A и, следовательно, все выполняемые преобразования таблицы определяются ее элементами и не зависят от правых частей, то эти системы можно решать одновременно. Исходная таблица будет иметь вид:

$$A \mid B_1 \mid B_2 \mid \ldots \mid B_k \parallel \Sigma,$$

т. е. до черты стоит общая для всех систем уравнений матрица системы, за чертой последовательно выписаны столбцы правых частей всех систем, а за двойной чертой – контрольный столбец. Проделав необходимое количество шагов, получим таблицу, из которой по обычному правилу выписывается решение каждой системы (в случае ее совместности), для чего используется соответствующий ей столбец правых частей.

Пример.

Решить системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение.

2	1	–1	2	–2	1	3
1	–1	2	2	0	–1	3
2	1	–1	2	–2	1	3
3	0	1	4	–2	0	6
5	1	0	6	–4	1	9
3	0	1	4	–2	0	6

Используя столбец правых частей, стоящий за первой чертой, напишем решение первой системы уравнений:

$$X^{(1)}_{общ} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 6-5x_1 \\ 4-3x_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, используя столбцы, стоящие после второй и третьей черты, напишем решения второй и третьей систем соответственно:

$$X^{(2)}_{общ} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4-5x_1 \\ -2-3x_1 \end{pmatrix}, \qquad X^{(3)}_{общ} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-5x_1 \\ -3x_1 \end{pmatrix}.$$

7.5. Нахождение обратной матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу A n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти обратную матрицу A^{-1}. Обозначим неизвестные элементы обратной матрицы через x_{ij} и будем искать ее в виде

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

По определению обратной матрицы $A \cdot A^{-1} = E$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем это равенство в развернутом виде. Для этого сначала все строки матрицы A умножим поочередно на первый столбец матрицы A^{-1}. В результате получим первый столбец произведения $A \cdot A^{-1}$, который приравняем первому столбцу матрицы E. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \ldots + a_{nn}x_{n1} = 0. \end{cases}$$

Это система n линейных уравнений с n неизвестными, причем матрицей системы является матрица A, а неизвестными – элементы первого столбца матрицы A^{-1}.

Затем умножим все строки матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} и приравняем полученные результаты соответствующим элементам второго столбца матрицы E. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{n2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \ldots + a_{nn}x_{nn} = 0. \end{cases}$$

Матрицей этой системы уравнений также является матрица A. Решив полученную систему, мы найдем элементы второго столбца матрицы A^{-1}. Проделав аналогичную процедуру с третьим, четвертым, …, n-м столбцами матрицы A^{-1}, получим еще n–2 системы уравнений с той же матрицей системы A и правыми частями, являющимся третьим, четвертым, …, n-м столбцами матрицы E. Неизвестными в полученных системах уравнений будут элементы третьего, четвертого, …, n-го столбцов искомой матрицы A^{-1}.

Таким образом, нахождение обратной матрицы A^{-1} свелось к решению n систем линейных уравнений с одной и той же матрицей системы A и с различными правыми частями, являющимися столбцами единичной матрицы n-го порядка. Как было показано в предыдущем параграфе, такие системы уравнений можно решать одновременно. Исходная таблица будет иметь следующий вид (вертикальные черточки между столбцами правых частей ставить для наглядности не будем):

A				E				Σ
a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	Σ_1
a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	Σ_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	0	0	…	1	Σ_n

Дальнейшие преобразования проводим по формулам полного исключения. Если на некотором шаге появляется строка, все элементы которой, стоящие до черты, равны нулю, то это означает, что исходная матрица A вырожденная и, значит, у нее не существует обратной. Вычисления на этом прекращаются. Если такой строки не возникает, то процедура метода полного исключения будет состоять из n шагов. Проделав эти шаги, переставим строки последней таблицы так, чтобы таблица приобрела следующий вид:

1	0	…	0	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}	Σ'_1
0	1	…	0	b_{21}	b_{22}	…	b_{2n}	Σ'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	0	…	1	b_{n1}	b_{n2}	…	b_{nn}	Σ'_n

Из этой таблицы получаем решения всех n систем уравнений.

Решение первой системы: $x_{11} = b_{11},\ x_{21} = b_{21},\ \ldots,\ x_{n1} = b_{n1}$,
т. е. первуй столбец матрицы A^{-1} совпал с первым столбцом таблицы, стоящим после черты.

Решение второй системы уравнений: $x_{12} = b_{12},\ x_{22} = b_{22},\ \ldots,\ x_{n2} = b_{n2}$,
т. е. второй столбец A^{-1} совпал со вторым столбцом после черты, и т. д.

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если строки последней таблицы упорядочить так, что на месте матрицы A (т. е. слева от черты) будет стоять единичная матрица, то на месте единичной матрицы (т. е. справа от черты) будет стоять обратная матрица A^{-1}.

Схематично процесс нахождения обратной матрицы методом полного исключения можно изобразить следующим образом:

A	E
…	…
…	…
…	…
E	A^{-1}

Пример.

Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1	1	0	1	1	0	0	0	4
0	–1	1	–1	0	1	0	0	0
2	0	1	2	0	0	1	0	6
–1	0	–1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	4
1	0	1	0	1	1	0	0	4
2	0	1	2	0	0	1	0	6
–1	0	–1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	4
1	0	1	0	1	1	0	0	4
1	0	0	2	–1	–1	1	0	2
0	0	0	1	1	1	0	1	4

1	1	0	0	0	–1	0	–1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	4
1	0	0	0	–3	–3	1	–2	–6
0	0	0	1	1	1	0	1	4
0	1	0	0	3	2	–1	1	6
0	0	1	0	4	4	–1	2	10
1	0	0	0	–3	–3	1	–2	–6
0	0	0	1	1	1	0	1	4
1	0	0	0	–3	–3	1	–2	
0	1	0	0	3	2	–1	1	
0	0	1	0	4	4	–1	2	
0	0	0	1	1	1	0	1	

Из последней (упорядоченной) таблицы выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, для чего вычислим $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

Подведем итог изложенному выше.

Для того, чтобы найти обратную матрицу методом полного исключения, необходимо:

1. Заполнить исходную таблицу, записав слева от черты исходную матрицу A, а справа от черты – единичную матрицу E такого же порядка. Подсчитать контрольный столбец.

2. Преобразовать таблицу по формулам полного исключения. Появляющиеся строки, все элементы которых до черты равны нулю, означают, что исходная матрица вырожденная и у нее не существует обратной.

3. Упорядочить строки последней таблицы так, чтобы на месте матрицы A, т. е. слева от черты, стояла единичная матрица. Тогда на месте единичной матрицы, т. е. справа от черты, будет стоять обратная матрица A^{-1}.

7.6. Проверка линейной зависимости множества векторов

Рассмотрим m n-мерных векторов:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}),\\
&\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\bar{a}_m = (a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{nm}).
\end{aligned}$$

Как известно, условие линейной зависимости этих векторов означает, что существуют некоторые числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что выполняется условие

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + ... + k_m\bar{a}_m = 0.$$

Перепишем это равенство в координатной форме, записывая для удобства векторы в виде вектор-столбцов:

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix} + ... + k_m\begin{pmatrix} a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases}
k_1a_{11} + k_2a_{12} + ... + k_ma_{1m} = 0,\\
k_1a_{21} + k_2a_{22} + ... + k_ma_{2m} = 0,\\
.\ .\\
k_1a_{n1} + k_2a_{n2} + ... + k_ma_{nm} = 0.
\end{cases} \qquad (7.5)$$

Таким образом, вопрос о линейной зависимости свелся к вопросу: существует ли ненулевое решение полученной системы уравнений или нет. Если у системы (7.5) существует ненулевое решение, то векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_m$ линейно зависимы, если же существует только нулевое решение $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$, то векторы линейно независимы.

Систему уравнений (7.5) решаем табличным вариантом метода полного исключения. Отметим, что первый столбец исходной таблицы является вектором $\bar{a}_1$, второй – вектором $\bar{a}_2$ и т. д., а столбец правых частей каждого шага является нулевым столбцом, поэтому его можно опустить. Таким образом, исходная таблица будет иметь вид:

$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	…	$\bar{a}_m$	$\sum$
a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	$\sum_1$
a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	$\sum_2$
…	…	…	…	…
a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	$\sum_n$

Если таблица последнего шага будет содержать m строк (столько же, сколько столбцов), то система (7.5) определенная, следовательно, имеет только нулевое решение. В этом случае векторы линейно независимы. Если же последняя таблица содержит строк меньше, чем столбцов (т. е. меньше m), то система неопределенная, следовательно, имеет ненулевые решения. В этом случае векторы линейно зависимы.

Пример 1.

Исследовать на линейную зависимость векторы

$$\bar{a}_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 1),\ \bar{a}_2 = (2,\ 1,\ 1,\ -1),\ \bar{a}_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0),\ \bar{a}_4 = (-1,\ 1,\ 0,\ 2).$$

Решение.

Составим исходную таблицу, расположив векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$ по столбцам, и подсчитаем контрольный столбец. Проделаем необходимое количество шагов метода полного исключения:

1	2	1	–1	3
–1	1	0	1	1
0	1	1	0	2
1	–1	0	2	2

1	2	1	–1	3
–1	1	0	1	1
–1	–1	0	1	–1
1	–1	0	2	2
0	3	1	0	4
–1	1	0	1	1
0	–2	0	0	–2
3	–3	0	0	0
0	3	1	0	4
–1	1	0	1	1
0	1	0	0	1
1	–1	0	0	0
0	0	1	0	1
–1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1

Из последней таблицы заключаем, что система уравнений имеет только нулевое решение, следовательно векторы линейно независимы.

Пример 2.

Исследовать на линейную зависимость векторы

$\bar{a}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\bar{a}_2 = (0,\ -1,\ 1,\ 1)$, $\bar{a}_3 = (1,\ 0,\ -1,\ 2)$, $\bar{a}_4 = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$.

Решение.

1	0	1	1	3
2	–1	0	1	2
1	1	–1	2	3
1	1	2	2	6
1	0	1	1	3
3	0	–1	3	5
1	1	–1	2	3
0	0	3	0	3
1	0	1	1	3
0	0	–4	0	–4
0	1	–2	1	0
0	0	3	0	3
1	0	0	1	2
0	0	0	0	0
0	1	0	1	2
0	0	1	0	1
1	0	0	1	2
0	1	0	1	2
0	0	1	0	1

Из последней таблицы заключаем, что система уравнений неопределенная, т. е. содержит ненулевые решения, следовательно, векторы линейно зависимы.

Подведем итог изложенному выше.

Для того, чтобы исследовать на линейную зависимость множество векторов, необходимо:

1. Составить исходную таблицу, расположив векторы по столбцам и подсчитав контрольный столбец.

2. Преобразовать таблицу по методу полного исключения.

3. Если последняя таблица содержит строк столько же, сколько столбцов (не считая контрольного столбца), то соответствующая система уравнений (7.5) определенная, следовательно имеет только нулевое решение. Значит векторы линейно независимы. Если последняя таблица содержит строк меньше, чем столбцов, то система (7.5) неопределенная, а, значит, имеет ненулевые решения. Следовательно, векторы линейно зависимы.

Следствие. В R_n любой набор из более чем n векторов всегда линейно зависим.

7.7. Ранг и базис множества векторов. Разложение векторов по базису

Рассмотрим m n-мерных векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$.

Рангом множества векторов называется максимальное число $\boldsymbol{r}$ линейно независимых векторов этого множества.

Базисом множества векторов называется любая упорядоченная совокупность r линейно независимых векторов множества.

Из этих определений следует, что базис находится неоднозначно, т. к. можно, вообще говоря, по-разному из векторов множества выбирать совокупности r линейно независимых векторов. Кроме того, можно по-разному упорядочить выбранную совокупность векторов.

Не ограничивая общности можно считать, что из данных m векторов линейно независимыми являются первые r векторов, которые упорядочены по возрастанию номеров, т. е. базис имеет следующий вид: $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_r\}$.

Теорема. Любой вектор $\bar{a}_i$ из данного множества векторов представим в виде линейной комбинации базисных векторов и это представление единственно.

Доказательство.

1. Докажем, что вектор $\bar{a}_i$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса, т. е. справедливо равенство

$$\bar{a}_i = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r\bar{a}_r. \tag{7.6}$$

Для этого рассмотрим следующую совокупность векторов:

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_r,\ \bar{a}_i.$$

Так как в этом наборе $r + 1$ вектор, то они линейно зависимы (согласно определению ранга множества векторов). Следовательно, в равенстве

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_r\bar{a}_r + k_{r+1}\bar{a}_i = 0 \tag{7.7}$$

хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля (согласно определению линейной зависимости векторов).

Предположим, что $k_{r+1} = 0$. Тогда равенство (7.7) приобретает вид

$$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_r\bar{a}_r = 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов k_j отличен от нуля, что противоречит линейной независимости векторов базиса. Таким образом, $k_{r+1} \neq 0$. Следовательно, из равенства (7.7) можно выразить вектор $\bar{a}_i$ через базисные векторы следующим образом:

$$\bar{a}_i = -\frac{k_1}{k_{r+1}}\bar{a}_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}}\bar{a}_2 - \ldots - \frac{k_r}{k_{r+1}}\bar{a}_r.$$

Вводя обозначения $\lambda_1 = -\frac{k_1}{k_{r+1}}$, $\lambda_2 = -\frac{k_2}{k_{r+1}}$, …, $\lambda_r = -\frac{k_r}{k_{r+1}}$, получаем искомое представление (7.6) вектора $\bar{a}_i$ в виде линейной комбинации базисных векторов, что и требовалось доказать.

2. Докажем, что представление (7.6) единственно. Предположим, имеется еще одно представление вектора $\bar{a}_i$ в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\bar{a}_i = \lambda_1'\bar{a}_1 + \lambda_2'\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r'\bar{a}_r. \qquad (7.8)$$

Вычитая из (7.6) данное равенство, получим:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_1')\bar{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\bar{a}_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_r')\bar{a}_r.$$

Так как базисные векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_r$ линейно независимы, то в полученном равенстве все коэффициенты равны нулю:

$$\lambda_1 - \lambda_1' = 0,\ \lambda_2 - \lambda_2' = 0,\ \ \ldots\ \ ,\ \lambda_r - \lambda_r' = 0,$$

т. е.

$$\lambda_1 = \lambda_1',\ \lambda_2 = \lambda_2',\ \ \ldots\ \ ,\ \lambda_r = \lambda_r'.$$

Следовательно, представление (7.8) совпадает с (7.6). Таким образом, представление (7.6) вектора $\bar{a}_i$ в виде линейной комбинации базисных векторов единственно, что и требовалось доказать.

Представление вектора $\bar{a}_i$ в виде

$$\bar{a}_i = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r\bar{a}_r$$

называется ***разложением вектора*** $\overline{a}_i$ множества ***по базису*** $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \ldots,\ \overline{a}_r\}$, а числа λ_1, λ_2, λ_r – ***координатами вектора*** $\overline{a}_i$ в этом базисе. ***В координатной форме*** такое ***разложение*** по базису можно записать так:

$$\overline{a}_i = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r).$$

Пример 1.

Даны векторы $\overline{a}_1$= (1, 2, 0), $\overline{a}_2$ = (0, 0, 2), $\overline{a}_3$ = (1, 2, 4).

Требуется:

1) найти ранг и какой-нибудь базис множества векторов;
2) разложить все векторы множества по выбранному базису.

Решение.

1. Легко проверить, что справедливо равенство $\overline{a}_3 = \overline{a}_1 + 2\overline{a}_2$. Следовательно, векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ линейно зависимы. В то же время векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ линейно независимы, т. к. равенство $\overline{a}_1 = k\overline{a}_2$ не выполняется ни при каком k. Таким образом, r = 2, $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2\}$ – базис.

Отметим, что линейно независимыми являются любые два вектора из данных в условии трех векторов. Поэтому в качестве базиса можно выбрать любую из 6 упорядоченных совокупностей: $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2\}$, $\{\overline{a}_2,\ \overline{a}_1\}$, $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_3\}$, $\{\overline{a}_3,\ \overline{a}_1\}$, $\{\overline{a}_2,\ \overline{a}_3\}$, $\{\overline{a}_3,\ \overline{a}_2\}$.

2. Разложение векторов множества по базису $\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2\}$ будет иметь вид:

$$\overline{a}_1 = 1\cdot\overline{a}_1 + 0\cdot\overline{a}_2 = (1, 0),$$
$$\overline{a}_2 = 0\cdot\overline{a}_1 + 1\cdot\overline{a}_2 = (0, 1),$$
$$\overline{a}_3 = 1\cdot\overline{a}_1 + 2\cdot\overline{a}_2 = (1, 2).$$

В общем случае довольно трудно найти ранг и базис, непосредственно пользуясь определением, как это было сделано в рассмотренном примере. Это объясняется тем, что при поверхностном рассмотрении множества векторов сложно заметить в нем какие-либо линейные зависимости. Но, тем не менее, такую задачу можно решить даже в том случае, когда множество состоит из большого количества векторов пространства большой размерности. Для удобства изложения рассмотрим решение задачи на конкретном примере.

Пример 2.

Найти ранг и какой-нибудь базис множества векторов

$$\overline{a}_1 = (1, 0, -1, 1),\ \overline{a}_2 = (0, 1, 1, -1),\ \overline{a}_3 = (-1, 1, 0, 1),$$
$$\overline{a}_4 = (1, -1, 0, 0),\ \overline{a}_5 = (0, 0, 1, -1).$$

Решение.

Составим исходную таблицу так, как мы это делали в случае исследования множества векторов на линейную зависимость в предыдущем параграфе, т. е. расположим векторы по столбцам и подсчитаем контрольный столбец. После этого преобразуем таблицу по методу полного исключения.

$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	Σ
1	0	–1	1	0	1
0	1	1	–1	0	1
–1	1	0	0	1	1
1	–1	1	0	–1	0
1	0	–1	1	0	1
0	1	1	–1	0	1
–1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	2
0	1	0	–1	0	0
–1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	2
0	1	0	–1	0	0
0	1	0	1	1	3
0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	2
0	1	0	–1	0	0
0	0	0	2	1	3
0	0	1	0	0	1

Из последней таблицы видно, что линейно независимыми являются следующие 4 вектора: $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_5$. Следовательно, r = 4. Что касается базиса, то перечисленные выше векторы образуют его в любом порядке. Например: $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_5\}$ или $\{\bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_1, \bar{a}_3\}$, или $\{\bar{a}_5, \bar{a}_1, \bar{a}_3, \bar{a}_2\}$ и т. д.

Как разложить векторы множества по базису? Рассмотрим решение этой задачи для векторов из предыдущего примера. Как будет показано ниже, искомое разложение векторов уже содержится в последней таблице примера 2, при этом базисные векторы удобнее брать во вполне определенном порядке.

Первым базисным вектором выбирается тот вектор, у которого в последней таблице единица стоит на первом месте, т. е. в первой строке (в предыдущем примере это вектор $\bar{a}_1$); вторым – тот вектор, у которого единица стоит на втором месте, т. е. во второй строке (в данном случае это вектор $\bar{a}_2$), третьим – вектор с единицей на третьем месте (вектор $\bar{a}_5$) и т. д. Таким образом, базис целесообразно выбрать следующим образом: $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$.

Пример 3.

Разложить векторы из примера 2 по базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$.

Решение.

Разложение базисных векторов очевидно:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= 1\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (1, 0, 0, 0),\\
\bar{a}_2 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 1\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (0, 1, 0, 0),\\
\bar{a}_5 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 1\cdot\bar{a}_5 + 0\cdot\bar{a}_3 = (0, 0, 1, 0),\\
\bar{a}_3 &= 0\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + 0\cdot\bar{a}_5 + 1\cdot\bar{a}_3 = (0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что именно такой вид имеют первый, второй, пятый и третий столбцы последней таблицы примера 2. Таким образом, разложение базисных векторов в координатной форме содержится в соответствующих столбцах вышеупомянутой таблицы.

Задача фактически свелась к разложению небазисного вектора $\bar{a}_4$ по выбранному базису, т. е. к поиску таких λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, что выполняется равенство

$$\bar{a}_4 = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_5 + \lambda_4\bar{a}_3.$$

Перепишем это равенство в координатной форме, записывая для удобства векторы в виде вектор-столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 - 1 \cdot \lambda_4 = 1, \\ 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 = -1, \\ -1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 1 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4 = 0, \\ 1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_3 + 1 \cdot \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений составим таблицу

$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	Σ
1	0	0	–1	1	1
0	1	0	1	–1	1
–1	1	1	0	0	1
1	–1	–1	1	0	0

Очевидно, что эта таблица имеет такой же вид, как и исходная таблица в примере 2, только ее столбцы переупорядочены. Преобразовав полученную таблицу по методу полного исключения (причем выбирая ведущие элементы так же, как это происходило в предыдущем примере), получим окончательно:

1	0	0	0	1	2
0	1	0	0	–1	0
0	0	1	0	2	3
0	0	0	1	0	1

Из этой таблицы находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 0$.

Следовательно, разложение вектора $\bar{a}_4$ по базису $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_5, \bar{a}_3\}$ имеет вид:

$$\bar{a}_4 = 1 \cdot \bar{a}_1 - 1 \cdot \bar{a}_2 + 2 \cdot \bar{a}_5 + 0 \cdot \bar{a}_3 = (1, -1, 2, 0).$$

Обратим внимание, что в последней таблице примера 2 четвертый столбец имеет такой же вид, т. е. разложение небазисного вектора $\bar{a}_4$ в координатной форме (так же, как и базисных векторов) тоже содержится в соответствующем столбце последней таблицы вышеупомянутого примера.

Следовательно, две задачи: нахождение базиса и разложение векторов множества по базису можно решать одновременно.

Подведем итог изложенному выше.

Для того, чтобы найти какой-нибудь базис множества векторов и разложить векторы множества по выбранному базису, необходимо:

1. Составить таблицу, записав векторы по столбцам, и подсчитать контрольный столбец.

2. Преобразовать полученную таблицу по методу полного исключения.

3. В качестве базиса выбрать векторы, соответствующие базисным столбцам, причем первым – тот вектор, который соответствует базисному столбцу с единицей в первой строке, вторым – с единицей во второй строке и т. д.

4. Последняя таблица будет содержать разложение всех векторов множества по выбранному базису в координатной форме: первый столбец – разложение первого вектора, второй – второго и т. д.

Пример 4.

Найти какой-нибудь базис множества векторов:

$$\bar{a}_1 = (1, -1, 2, 1), \ \ \bar{a}_2 = (0, 1, -1, 0), \ \ \bar{a}_3 = (1, 0, 1, 1),$$

$$\bar{a}_4 = (2, -1, 3, 2), \ \ \bar{a}_5 = (1, -2, 3, 1)$$

и разложить векторы множества по выбранному базису.

Решение.

1	0	1	2	1	5
–1	1	0	–1	–2	–3
2	–1	1	3	3	8
1	0	1	2	1	5

1	0	1	2	1	5
–1	1	0	–1	–2	–3
1	0	1	2	1	5
1	0	1	2	1	5
1	0	1	2	1	5
–1	1	0	–1	–2	–3
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	0	1	2	1	5
–1	1	0	–1	–2	–3

Из последней таблицы следует:

1) $\{\bar{a}_3,\ \bar{a}_2\}$ – базис данного множества векторов;

2) разложение небазисных векторов множества по базису $\{\bar{a}_3,\ \bar{a}_2\}$ имеет вид:

$$\bar{a}_1 = (1,-1) = 1\cdot\bar{a}_3 + (-1)\cdot\bar{a}_2 = \bar{a}_3 - \bar{a}_2,$$
$$\bar{a}_4 = (2,-1) = 2\cdot\bar{a}_3 + (-1)\cdot\bar{a}_2 = 2\bar{a}_3 - \bar{a}_2,$$
$$\bar{a}_5 = (1,-2) = 1\cdot\bar{a}_3 + (-2)\cdot\bar{a}_2 = \bar{a}_3 - 2\bar{a}_2.$$

Сделаем проверку, воспользовавшись представлением векторов в исходном базисе:

$$\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (1,\ -1,\ 2,\ 1) = \bar{a}_1,$$
$$2\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = 2(1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (2,\ 0,\ 2,\ 2) - (0,\ 1,\ -1,\ 0) = (2,\ -1,\ 3,\ 2) = \bar{a}_4,$$
$$\bar{a}_3 - 2\bar{a}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - 2(0,\ 1,\ -1,\ 0) = (1,\ 0,\ 1,\ 1) - (0,\ 2,\ -2,\ 0) = (1,\ -2,\ 3,\ 1) = \bar{a}_5.$$

Все равенства верны, следовательно разложение векторов по базису найдено правильно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие преобразования системы уравнений называются элементарными?
2. Какие системы уравнений называются эквивалентными?

3. Опишите один шаг метода полного исключения.
4. Какие неизвестные называются базисными, свободными?
5. Что такое общее решение системы линейных уравнений?
6. Какое решение системы уравнений называется частным? Сколько частных решений имеет неопределенная система уравнений?
7. Какое решение называется базисным?
8. Опишите решение системы уравнений табличным вариантом метода полного исключения.
9. Сформулируйте правило прямоугольника.
10. Как преобразуется таблица по формулам полного исключения?
11. Какой вид имеет исходная таблица при решении систем уравнений с одинаковой матрицей системы?
12. Опишите алгоритм нахождения обратной матрицы методом полного исключения.
13. В каком случае можно сделать вывод о том, что исходная матрица вырожденная?
14. Сформулируйте условие линейной зависимости множества векторов.
15. Опишите алгоритм исследования на линейную зависимость множества векторов.
16. Что можно сказать о линейной зависимости пяти векторов в пространстве R_4? Ответ обоснуйте.
17. Что называется рангом и базисом множества векторов?
18. Дайте определение разложения вектора множества по базису. Что такое координаты вектора в этом базисе?
19. Опишите алгоритм поиска базиса множества векторов и разложения векторов множества по выбранному базису.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы считают, что обучение экономистов математике нельзя подменить обучением ряду ее приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий и не учитывая внутреннюю логику самой математики. Так подготовленные специалисты могут оказаться беспомощными при изучении новых конкретных явлений, поскольку будут лишены необходимой математической культуры и не приучены к рассмотрению абстрактных математических моделей. По меньшей мере необходимо получение ими правильного общего представления о том, что такое математика, в чем заключается математический подход к изучению явлений реального мира, как его можно применять и что он может дать.

Математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических структурах со своими проблемами, с собственными путями развития, обусловленными внутренними и внешними причинами и задачами. Математика представляет интерес прежде всего сама по себе, как совокупность объективных истин. Кроме того, математика дает удобные и плодотворные способы описания самых разнообразных явлений реального мира и тем самым выполняет в этом смысле функцию языка. Эту роль математики прекрасно осознавал ещё Галилей, сказавший: «Философия написана в грандиозной книге – Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики…».

- Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели. (А. Маркушевич)
- Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле. (А. Н. Крылов)
- Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе? (Платон)
- Было бы хорошо, если бы эти знания требовало само государство и если бы лиц, занимающих высшие государственные должности, приучали заниматься математикой и в нужных случаях к ней обращаться. (Платон)
- Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание, в настоящее время они получили еще больше интереса по влиянию своему на искусство и промышленность. (П. Л. Чебышев)
- Математика есть лучшее и даже единственное введение в изучение природы. (Д. И. Писарев)
- Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии. (А. С. Пушкин)
- Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу – это значит пережить приключение. (В. Произволов)
- В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии. (Н. Е. Жуковский)
- Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит. (М. В. Ломоносов)
- Математика – это язык, на котором говорят все точные науки. (Н. И. Лобачевский)
- Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств. (Л. Эйлер)
- Цифры (числа) не управляют миром, но они показывают, как управляется мир. (И. Гете)
- Было бы легче остановить Солнце, легче было сдвинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение. (В. Ф. Каган)
- Счет и вычисления – основа порядка в голове. (Песталоцци)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
РАЗДЕЛ I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ 4
Глава 1. Векторы в R_3 4
1.1. Основные сведения о векторе. Линейные операции над векторами 4
1.2. Деление отрезка в заданном отношении 7
1.3. Скалярное произведение векторов 8
Глава 2. Векторы в R_n 12
2.1. Основные понятия и определения 12
2.2. Линейная зависимость и независимость векторов 13
Вопросы для самоконтроля 16
Глава 3. Аналитическая геометрия на плоскости 17
3.1. Понятие уравнения линии в R_2. Пересечение линий 17
3.2. Прямая в R_2. Различные формы записи уравнения прямой 19
3.3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых 23
3.4. Расстояние от точки до прямой 25
3.5. Полуплоскость 26
Глава 4. Аналитическая геометрия в пространстве 29
4.1. Понятие уравнения поверхности и линии в R_3 29
4.2. Плоскость в R_3. Угол между двумя плоскостями 30
4.3. Расстояние от точки до плоскости 31
Вопросы для самоконтроля 32
РАЗДЕЛ II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 33
Глава 5. Матрицы и определители 33
5.1. Основные сведения о матрицах 33
5.2. Действия над матрицами 35

5.3. Определители второго и третьего порядка 38
5.4. Определители n-го порядка 43
5.5. Основные свойства определителей 44
5.6. Вычисление определителей методом понижения порядка 49
5.7. Обратная матрица 52
Вопросы для самоконтроля 56
Глава 6. Системы линейных алгебраических уравнений 57
6.1. Основные понятия и формы записи 57
6.2. Формулы Крамера 58
6.3. Решение систем уравнений при помощи обратной матрицы 61
Вопросы для самоконтроля 63
Глава 7. Метод полного исключения и его приложения 64
7.1. Идея метода полного исключения 64
7.2. Табличный вариант метода полного исключения 67
7.3. Формулы полного исключения 74
7.4. Решение систем уравнений, отличающихся правыми частями 81
7.5. Нахождение обратной матрицы 82
7.6. Проверка линейной зависимости множества векторов 87
7.7. Ранг и базис множества векторов. Разложение векторов по базису 91
Вопросы для самоконтроля 98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 100
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 101

Навчальне видання

МИХАЙЛЕНКО Світлана Василівна
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

(російською мовою)

В авторській редакції
Компьютерний набір і верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку 15.05.2018 Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 6,04. Обл.-вид. арк. 3,03.
Тираж 50 пр. Зам №

План 2017/18 навч. р., поз. №5 в переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.