ВВЕДЕНИЕ

Переход к рыночным отношениям привел к необходимости подготовки экономистов, владеющих соответствующим математическим аппаратом экономических исследований и умеющих применить его на практике. Фундаментальную основу в математической подготовке экономистов составляет курс «Математика для экономистов».

У изучающих математику будущих экономистов наибольшие трудности вызывает решение задач. В обширной математической литературе недостаточно руководств к практическим занятиям по этому курсу, которые систематически и достаточно подробно знакомили бы студентов с методами решения задач и помогли бы им приобрести необходимые навыки.

Цель этого пособия – восполнить в известной мере этот пробел, помочь студентам научиться самостоятельно решать основные типы задач по теории вероятностей и математической статистике.

Весь материал пособия разделен на отдельные параграфы. В начале каждого параграфа помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения последующих задач. Затем приводятся подробные решения типовых задач с краткими пояснениями теоретических положений. В конце каждого параграфа содержится достаточное количество задач для самостоятельного решения.

Такое построение учебного пособия позволяет использовать его как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика».

Студенты получат большую пользу, если будут работать над пособием активно. Это значит, что прежде чем приступить к решению задач, следует основательно изучить теоретический материал, относящийся к соответствующему параграфу. Затем надо внимательно, подробно, с выполнением всех действий на бумаге разобрать решенные задачи и обязательно закрепить знания решением задач, предназначенных для самостоятельной работы. Еще лучше, если студенты, усвоив теорию, сразу приступают к самостоятельному решению задач, обращаясь к решениям в тексте лишь в случае затруднений.

Учитывая, что учебное пособие предназначено для студентов-экономистов, в нем рассматривается значительное число задач с экономическим смыслом, которые помогут приобрести навыки применения математического анализа прикладных задач в экономике, планировании и управлении производством, в финансовой и коммерческой деятельности.

Для удобства работы с пособием все основные статистические таблицы приведены отдельно в виде Приложений и помещены в конце пособия.

Пособие написано в полном соответствии с программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Оно рассчитано как на студентов очной формы обучения, так и на студентов-заочников.

Таким образом, данное учебное пособие может быть использовано как справочник, решебник и в то же время как задачник, что весьма удобно для студентов и предоставляет им широкие возможности для активной самостоятельной работы.

Теория вероятностей есть, собственно говоря, только переложение здравого смысла на формулы, она доставляет средства для точной оценки того, что постигает ум верный, хотя часто бессознательно.

Пьер Лаплас

(Из книги «Аналитическая теория вероятностей»)

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. *Элементы комбинаторики*

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Другими словами, это раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и расположения этих элементов в каком-либо порядке.

Перестановками из n элементов называются всевозможные совокупности из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех различных перестановок из n различных элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Размещениями из n элементов по m называются всевозможные совокупности m элементов из n, отличающиеся друг от друга либо самими элементами, либо порядком расположения элементов.

Число всех различных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями из n элементов по m называются всевозможные совокупности m элементов из этих n, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всех сочетаний из n различных элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

Из формулы для вычисления C_n^m вытекают свойства:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 3) $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1}C_n^k$.

Целые числа C_n^m еще называются биномиальными коэффициентами, т. к. выражение $(a + b)^n$, называемое биномом Ньютона, можно представить в виде разложения:

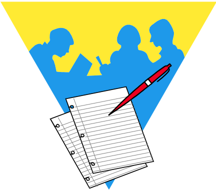
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n = \\ = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,$$

$(m + 1)$-ое слагаемое в этом разложении имеет вид $C_n^m a^{n-m} b^m$ и называется общим (m-ым) членом разложения.

Если в разложении бинома Ньютона положить $a = b = 1$, то получим формулу:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

которая применяется в теории вероятностей.



ПРИМЕРЫ

1. Студентам группы необходимо сдать в сессию экзамены по 5 курсам. Сколькими способами может быть составлено расписание экзаменов, если учитывать только последовательность их сдачи?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через А, В, С, Д и Е курсы, по которым необходимо сдать экзамены. Предположим, что первым будет экзамен по курсу В, вторым – Д, третьим – Е, четвертым – А и пятым – С. Тогда расписание экзаменов будет иметь вид ВДЕАС. Аналогично, при другой последовательности сдачи экзаменов получаем совокупность тех же пяти букв, но с другим порядком их следования. Следовательно, каждому варианту расписания экзаменов соответствует некоторая перестановка из 5 элементов: А, В, С, Д и Е. Общее число этих перестановок, а значит, и количество способов составления расписания экзаменов равно: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

2. Студенты изучают 8 предметов. Ежедневно у них по 3 пары занятий. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на 1 день?

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через A, B, C, D, E, F, G, H предметы, которые изучают студенты. Если на первой паре будет занятие по предмету D, на второй – по B, на третьей – по F, то расписание занятий примет вид DBF. При другом выборе предметов получим другую совокупность трех букв из данных восьми. При этом существенен порядок расположения букв. Например, расписание BFD означает, что на первой паре занятие будет по предмету B, на второй – по предмету F, на третьей – по предмету D. Это, очевидно, отличается от расписания DBF. Следовательно, каждому расписанию занятий отвечает некоторое размещение из 8 элементов по 3. Общее число таких размещений: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

3. Из 6 спецкурсов студент обязан сдать экзамены по 3 спецкурсам, которые он выбирает по своему усмотрению. Сколько различных выборов имеет студент?

РЕШЕНИЕ.

Пусть A, B, C, D, E, F – спецкурсы, которые может сдавать студент. Если он выбрал для сдачи спецкурсы A, C и E, то его выбор можно записать ACE. Причем порядок следования букв несущественен. Действительно, EAC, CAE, AEC и т. д. означают выбор студентом тех же спецкурсов

А, С и Е. Следовательно, каждому выбору студента соответствует некоторое сочетание из 6 элементов по 3. Их общее число: $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

4. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что в числе нет одинаковых цифр?

РЕШЕНИЕ.

Число, кратное 5, должно оканчиваться либо цифрой 0, либо цифрой 5. Если последней цифрой числа служит 0, то остальные 5 цифр можно располагать в любом порядке. Таким образом, шестизначных чисел, оканчивающихся цифрой 0, имеется столько, сколько можно сделать перестановок из 5 элементов 1, 2, 3, 4, 5, т. е. P_5. Если последней цифрой числа является 5, то остальные пять цифр снова можно расположить P_5 способами, но из этих способов недействительными являются те, при которых на первом месте окажется цифра 0 (число не может начинаться с цифры 0). Поэтому из P_5 перестановок нужно вычесть те, которые начинаются цифрой 0. Таких перестановок столько, сколькими способами можно расположить цифры 1, 2, 3, 4 на втором, третьем, четвертом и пятом местах шестизначного числа, т. е. P_4. Значит, количество чисел, кратных 5 и оканчивающихся цифрой 5, равно $P_5 - P_4$. Окончательно получаем, что всего имеется $P_5 + (P_5 - P_4)$ шестизначных чисел, состоящих из различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и кратных пяти. Произведем вычисления:

$$P_5 + (P_5 - P_4) = 2P_5 - P_4 = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 216$$

5. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы: 1) ровно 2 из них оказались выигрышными; 2) по крайней мере 3 из них оказались выигрышными. Всего в урне 50 билетов.

РЕШЕНИЕ.

1) Если среди вынутых 5 билетов должно быть ровно 2 выигрышных, то остальные три должны быть невыигрышные. Из 8 выигрышных билетов можно выбрать два C_8^2 способами, а три невыигрышных билета можно выбрать из: 50 – 8 = 42 билетов – C_{42}^3 способами. Каждый способ выбора двух выигрышных билетов может сочетаться с любым из способов выбора трех невыигрышных. Поэтому общее число способов равно:

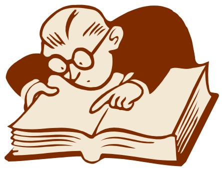
$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 321440.$$

2) Число способов выбора 5 билетов, из которых, по крайней мере, три будут выигрышными, равно сумме числа способов, при которых вы-

нимается ровно 3 выигрышных, ровно 4 выигрышных и ровно 5 выигрышных билетов. Следовательно, это число равно:

$$C_8^3 \cdot C_{42}^2 + C_8^4 \cdot C_{42}^1 + C_8^5 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{42 \cdot 41}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{42}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$= 48216 + 2940 + 56 = 51212$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6. Сколькими способами можно расставить 6 книг на книжной полке?

7. Из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно выбрать 4 человека на 4 различные должности из 9 кандидатов на эти должности?

9. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из 5?

10. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

11. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 человек, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете на 1000 м: 100 + 200 + 300 + 400 м?

12. Имеется 6 предметов. Они распределяются на две группы так, что в одной оказываются 2, а в другой 4 предмета. Сколько таких распределений возможно?

13. Сколько чисел, начинающихся с цифры 5, можно получить, переставляя всевозможными способами цифры числа 19058?

14. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 5, 0, если каждая из этих цифр в запись числа может входить лишь один раз?

15. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены различные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые:

1) начинаются цифрой 3?
2) не начинаются цифрой 5?
3) начинаются с числа 54?
4) не начинаются с числа 54?

5) являются четными?

6) делятся на 4?

16. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более 3 имен?

17. Из группы студентов, состоящей из 20 человек, необходимо выделить на воскресник хотя бы 15 человек. Сколькими способами это можно сделать?

18. У одного человека есть 7 книг по математике, у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять:

1) книгу одного на книгу другого?
2) две книги одного на две книги другого?

19. Сколькими способами можно выбрать из слова «цветок»:

1) пару букв (гласную и согласную)?
2) тройку букв (гласную и две согласные)?

20. Сколько можно написать четырехзначных чисел, используя цифры от 1 до 9, если каждая из этих цифр в записи числа может встречаться:

1) один раз?
2) не один раз?

21. Решить задачу 20 при условии, что можно пользоваться всеми цифрами от 0 до 9.

22. В урне 10 черных и 6 белых шаров. Сколькими способами можно извлечь: 1) 7 шаров?

2) 8 черных шаров?
3) 3 белых шара?
4) 5 черных и 2 белых шара?

23. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать: 1) по одному слову; 2) по два слова каждого рода. Сколькими способами может быть сделан выбор?

24. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно извлечь:

1) 6 карт?
2) 6 карт, из которых 2 туза?
3) 6 карт, из которых 1 карта пиковой масти, 2 – трефовой и 3 – бубновой?
4) 6 карт, из которых 2 туза, 2 короля и 2 дамы?
5) 6 карт, среди которых не менее 3 тузов?

25. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в первой и второй пачке было по 2 туза?

26. Найти: $\frac{P_8 - P_7}{7P_7}$, $\frac{P_{2m+1}}{P_{2m-1}}$, $\frac{(n+3)!}{n!}$.

27. Какую степень x содержит седьмой член разложения бинома $\left(x^2 - \frac{2}{x^4}\right)^{12}$?

28. Коэффициент второго члена разложения $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ равен 5. Найти средний член разложения.

29. В разложении $\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

30. В разложении $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ найти член, который содержит x^3.

31. В разложении $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{15}$ найти член, который не содержит x.

32. Найти второе слагаемое разложения бинома $\left(\sqrt[13]{a} + \frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$, если: $\frac{C_m^3}{C_m^2} = 4$.

1.2. *Случайные события. Классификация событий. Сумма и произведение событий*

Событие называется ***случайным***, если в данном испытании оно может произойти или не произойти.

Обозначают события большими буквами латинского алфавита – *A, B, C* и т. д.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно непременно произойдет. Достоверное событие будем обозначать U.

Событие называется ***невозможным***, если в данном испытании оно не может произойти. Невозможное событие будем обозначать значком $\varnothing$.

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события ***совместны***.

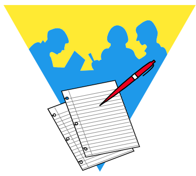
Суммой двух случайных событий A и B называется событие $C = A + B$, заключающееся в появлении хотя бы одного из событий – слагаемых.

Произведением двух событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, заключающееся в одновременном появлении и события A, и события B.

Аналогично определяется сумма и произведение любого конечного числа событий.

Два события A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если для них одновременно выполняются два соотношения: $A + \overline{A} = U$; $A \cdot \overline{A} = \varnothing$. Событие $\overline{A}$ состоит в непоявлении события A.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу***, если их сумма – достоверное событие и любые два события A_i и A_j являются несовместными событиями, т. е.: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.



ПРИМЕРЫ

33. Игральная кость подбрасывается один раз. Рассматриваются следующие события:

A – число очков кратно 3;
B – число очков четно;
C – число очков нечетно;
D – число очков меньше 7;
E – число очков больше 2, но меньше 3.

Какие события являются случайными, достоверными, невозможными?

Р Е Ш Е Н И Е.

События A, B и C в результате испытания могут произойти или не произойти. Следовательно, A, B и C – случайные события. Событие D в результате испытания всегда происходит; следовательно, D – достоверное событие. Событие E не может произойти; следовательно, E – невозможное событие.

34. Игральная кость подбрасывается один раз. Рассматриваются следующие события:

А – число очков кратно 3;

В – число очков четно;

С – число очков нечетно.

Какие пары событий A и B, A и C, B и C являются совместными или несовместными?

РЕШЕНИЕ.

Появление события A не исключает появления события B (число очков равно 6), следовательно, A и B – совместные события.

Появление события A не исключает появления события C (число очков равно 3), следовательно, A и C – совместные события.

Появление события B исключает появление события C, следовательно, B и C – несовместные события.

35. Игральная кость подбрасывается один раз. Рассматриваются следующие события:

A – число очков кратно 3;

B – число очков четно;

C – число очков нечетно.

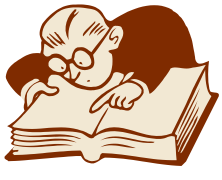
Выяснить смысл следующих событий: $\overline{B}$, $A + B$, $A \cdot C$?

РЕШЕНИЕ.

Событие $\overline{B}$ состоит в непоявлении события B, т. е. число очков не является четным. Следовательно, $\overline{B} = C$.

Событие $A + B$ состоит в появлении хотя бы одного из событий A или B, т. е. число очков или кратно 3, или четно. Следовательно, событие $A + B$ – число очков равно 2, 3, 4 или 6.

Событие $A \cdot C$ состоит в одновременном появлении событий A и C, т. е. число очков кратно 3 и в то же время нечетно. Следовательно, событие $A \cdot C$ – число очков равно 3.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

36. Игральная кость бросается дважды. Рассматриваются события:

A – сумма очков не меньше 2;

B – сумма очков нечетна;

C – сумма очков равна 13;

D – сумма очков равна 7.

Какие из перечисленных событий являются случайными, достоверными, невозможными?

37. Монета подбрасывается три раза.

A – герб выпал более 1 раза;

B – цифра выпала 4 раза;

C – выпало больше гербов, чем цифр;

D – герб выпал менее 5 раз.

Какие из перечисленных событий являются случайными, достоверными, невозможными?

38. Производится два выстрела по мишени. Рассматриваются события:

A – ни одного попадания;

B – хотя бы одно попадание;

C – хотя бы один промах.

Являются ли несовместными пары событий *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*?

39. Из колоды карт вынимаются две карты. Рассматриваются события:

A – обе карты черной масти;

B – обе карты тузы;

C – хотя бы одна из карт дама.

Являются ли перечисленные события попарно совместными?

40. Назвать противоположные для следующих событий:

A – выпадение двух гербов при бросании двух монет;

B – появление белого шара при вынимании одного шара из урны, где находятся белые, черные и красные шары;

C – три попадания при трех выстрелах;

D – хотя бы одно попадание при 5 выстрелах;

E – не более двух попаданий при 5 выстрелах;

F – выигрыш первого игрока при игре в шахматы.

41. В ящике находятся шары с номерами от 1 до 15. Наугад вынимается один шар. Рассматриваются события:

A – номер шара четный;

B – номер шара двузначный;

C – номер шара меньше 12.

Описать события AB, BC, $B + C$, $A\overline{C}$, $\overline{A}B$, ABC, $\overline{B}A + B\overline{C}$.

42. Бросаются две игральные кости. Рассматриваются события:

A – число очков на первой кости четное;

B – число очков на обеих костях одинаковое;

C – на второй кости выпало 6 очков.

Описать события $B + C$, AC, $\overline{A}B$, $BC + \overline{A}C$, $AB\overline{C}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что больше: A_7^3 или C_7^3 и почему?
2. Что из перечисленного не имеет смысла A_{10}^3, C_7^4, P_5, A_3^4, C_6^0, C_4^6?
3. Решить уравнение $\dfrac{P_n}{(n-2)!} = 6$.
4. Приведите примеры совместных и несовместных событий.
5. Приведите пример полной группы несовместных событий.
6. Являются ли противоположные события несовместными?
7. Можно ли говорить, что несовместные события противоположны?
8. Событие B является частным случаем события A, т. е. из появления события B с достоверностью вытекает появление события A. Найти:

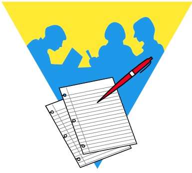
   а) $A + B$; б) $A \cdot B$.

1.3. *Непосредственное вычисление вероятностей событий*

Если события попарно несовместны, равновозможны и их сумма есть достоверное событие, то они называются ***элементарными исходами испытания*** или ***элементарными событиями***.

Пусть m – число элементарных исходов испытания, в результате которых появится интересующее нас событие A. Эти исходы испытания будем называть ***благоприятствующими появлению события*** A. И пусть n – число всех элементарных исходов испытания.

Вероятностью появления события A называется число, равное отношению количества элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, к общему количеству элементарных исходов испытания, т. е.: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{m}{n}$.



ПРИМЕРЫ

43. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет нечетное число очков.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через A событие – выпадение нечетного числа очков. Число всех элементарных исходов $n = 6$. Число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, $m = 3$ (выпадение 1, 3 и 5 очков). Поэтому: $\text{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1/2.

44. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через B событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько пар различных цифр, сколько может быть составлено размещений из 10 цифр по 2, т. е.: $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов $n = 90$. Благоприятствует событию B лишь один исход. Следовательно, $\text{P}(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Ответ: 1/90.

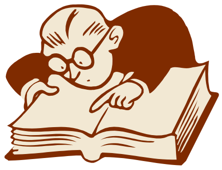
45. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад ровно 4 стандартные.

РЕШЕНИЕ.

Общее число элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е.: $n = C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A – среди шести взятых деталей ровно 4 стандартные. Четыре стандартные детали можно взять из 7 стандартных C_7^4 способами; взять остальные: $6 - 4 = 2$ нестандартные детали из: $10 - 7 = 3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, $m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 105$.

Поэтому: $\text{P}(A) = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1/2.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

46. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из которых 5 окрашенных. Наугад вынимается одна деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

47. Игральная кость бросается 1 раз. Какова вероятность того, что:
1) выпадет шесть очков?
2) выпадет нечетное число очков?
3) выпадет число очков больше 4?

48. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб.

49. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что сумма очков на ней будет равна:
1) четырем;
2) шести;
3) двенадцати;
4) тринадцати.

50. Вычислить вероятность того, что задуманное в пределах 100 целое число:
1) делится на 10 или 11;
2) не содержит цифры 5.

51. Абонент забыл последние две цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число меньшее 30. С учетом этого он набирает вместо них наугад две цифры. Определить вероятность того, что он наберет нужные цифры.

52. Что вероятнее при бросании двух костей: выпадение 10 или 9 очков?

53. Определить вероятность того, что во взятом наугад двузначном числе обе цифры окажутся одинаковыми.

54. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: 1) одну; 2) две; 3) три.

55. Имеются 5 букв: Р, Е, Г, Й, О. Какова вероятность того, что:

1) произвольное расположение их одна за другой даст слово «ГЕРОЙ»?
2) произвольное расположение одна за другой трех наугад взятых букв даст слово «РОЙ»?

56. В коробке шесть занумерованных кубиков. Наугад по одному извлекаются все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

57. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в правильном порядке справа налево или слева направо.

58. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже зашли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что:

1) все пассажиры выйдут на пятом этаже;
2) все пассажиры выйдут одновременно (на одном этаже);
3) все пассажиры выйдут на разных этажах.

59. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что:

1) извлеченные детали окажутся окрашенными;
2) извлеченные детали окажутся неокрашенными;
3) среди извлеченных деталей – одна окрашенная.

60. Магазин получает товар партиями по 100 штук. Если 5 взятых наугад образцов соответствуют стандартам, партия поступает на реализацию. В очередной партии 8 образцов товара с дефектом. Найти вероятность того, что товар поступит на реализацию.

61. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

62. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наугад извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей:

1) нет бракованных;
2) нет годных;
3) 2 бракованных;
4) более 2 бракованных;
5) не более 2 бракованных.

63. Числа **1, 2, 3, 4, 5** написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки и ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

64. Телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

65. В урне 8 черных и 7 белых шаров. Из урны вынимаются 6 шаров. Какова вероятность того, что среди шаров:

1) нет белых;
2) 3 белых;
3) менее 2 белых;
4) не менее 5 белых.

66. Из колоды карт (36 карт) наудачу извлекается 4 карты. Найти вероятность того, что среди этих карт:

1) дама, король и 2 туза;
2) все одной масти;
3) 3 дамы;
4) нет королей;
5) 1 черной масти;
6) не более 2 красной масти.

67. На экзамене может быть предложено 30 вопросов. Студент знает ответы на 25. Экзаменатор задает студенту 3 вопроса, а для того, чтобы сдать экзамен, нужно ответить не меньше, чем на 2 вопроса. Какая вероятность того, что студент сдаст экзамен?

68. Эксперт по управлению ценными бумагами рассматривает 20 объектов для инвестирования, среди которых 9 строительных организаций, 5 туристических фирм, 6 транспортных компаний. Только 10 из них будут выбраны. Какова вероятность того, что среди выбранных окажутся:

1) все туристические фирмы;
2) 3 строительные организации;
3) не более 2 туристических фирм.

69. Компания выпускает кредитные карточки, которые имеют перед 4 цифрами две буквы латинского алфавита. Приобретается 1 кредитная карточка. Найти вероятность того, что:

1) буквы на кредитной карточке будут разные;
2) все цифры нечетные;
3) буквы одинаковые, а среди цифр нет совпавших.

70. Ребенок играет с десятью буквами азбуки: **А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т**. Найти вероятность того, что он случайно сложит слово **МАТЕМАТИКА**.

71. Совет директоров компании состоит из 2 бухгалтеров, 8 менеджеров и 6 инженеров. Планируется создать комитет из 5 его членов. Какова вероятность того, что в комитете окажутся:

1) все инженеры;
2) 2 бухгалтера;
3) 2 менеджера и 1 инженер;
4) более 3 менеджеров.

72. Каждую пятницу бронированный автомобиль доставляет заработную плату из местного отделения банка в 5 фирм. В качестве меры предосторожности стараются использовать различные маршруты. Водитель выбирает 1 из предложенных диспетчером вариантов. Какова вероятность того, что:

1) нынешний маршрут не повторит предыдущий;
2) маршрут не повторится ни разу в течение месяца;
3) фирмы A и B будут обслужены одна за другой в течение одной пятницы.

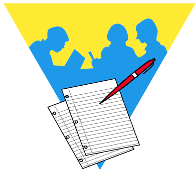
73. В зрительном зале кинотеатра 9 рядов, пронумерованных подряд числами от 1 до 9, а в каждом ряду по 9 кресел, также пронумерованных числами от 1 до 9. Зритель наудачу занимает место. Что вероятнее: сумма номеров ряда и места в ряду окажется четной или нечетной?

74. Каждый из двух ваших друзей живет в одном из 50 домов с номерами от 1 до 50. В каждом из этих домов по 100 квартир с номерами от 1 до 100. Где живет каждый из ваших приятелей, вы точно не знаете. Вам известно лишь, что: а) номер квартиры первого заканчивается на 3; б) номер дома второго делится на 5, а номер его квартиры – на 2. В каком случае вероятность попасть в нужную вам квартиру с первого раза наибольшая?

75. Дима и Таня договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Они оба очень хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято распределять места путем жребия?

1.4. *Геометрические вероятности*

Геометрическое определение вероятности удобно использовать тогда, когда в результате испытания возможно появление любого из бесконечного числа исходов. Множество исходов испытания интерпретируется некоторым множеством точек, причем вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой области (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы. Пусть всем возможным результатам испытания соответствуют точки области G, а рассматриваемому событию A – точки области g, которая является частью области G. Тогда: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{mesg}{mesG}$, где $mesS$ – это длина, площадь или объем области S.

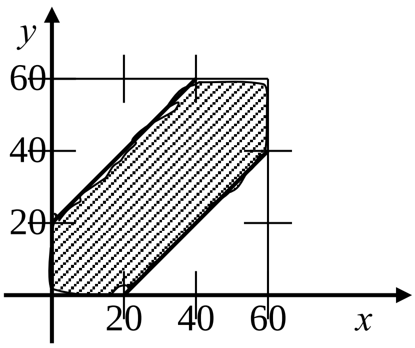


ПРИМЕР

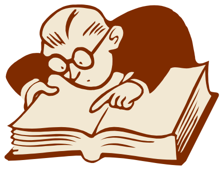
76. ***Задача о встрече.***
Двое договорились о встрече между 12.00 и 13.00 ч, причем каждый ожидает другого 20 мин, после чего уходит. Определить вероятность встречи, если каждый из двоих приходит в случайный момент времени этого интервала.

Р Е Ш Е Н И Е.

Обозначим момент прихода одного лица через x, а второго – через y. Будем рассматривать x и y как декартовы координаты на плоскости. Возможные исходы изобразятся точками квадрата, т. к. $0 \le x \le 60$ мин, $0 \le y \le 60$ мин. Чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $|x - y| \le 20$ мин $\Rightarrow -20 \le x - y \le 20 \Rightarrow x - 20 \le y \le x + 20$. Исходы, благоприятствующие встрече, располагаются в заштрихованной области.



Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади всего квадрата, т. е.: $\mathrm{p} = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = \dfrac{5}{9}$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

77. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l.

78. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечен ни одной линией.

79. На отрезке AB длиной l наудачу поставлены 2 точки L и M. Найти вероятность того, что точка L будет ближе к точке M, чем к точке A.

80. На отрезке длиной l наудачу ставятся 2 точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на 3 части. Определить вероятность того, что из 3 получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

81. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода 1 час, а второго – 2 часа.

82. В одной из популярных в Америке игр игрок бросает монету с достаточно большого расстояния на поверхность стола, разграфленную на однодюймовые квадраты. Если монета ($3/4$ дюйма в диаметре) попадает полностью внутрь квадрата, то игрок получает награду, в противном случае он теряет свою монету. Каковы шансы выиграть при условии, что монета упала на стол.

83. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 4 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

84. На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше $l/2$?

85. На отрезке AB длиной l наудачу поставлена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и CB имеет длину меньшую, чем $l/3$.

86. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

87. Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибегает на место встречи в случайный момент времени между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти пять минут – дуэль состоится. Какова вероятность того, что поединок состоится?

88. Противотанковые мины поставлены на прямой через 15 метров. Танк шириной в 3 м движется перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность того, что он подорвется?

1.5. *Теоремы сложения и умножения вероятностей*

Теорема сложения вероятностей:

– для двух совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

– для двух несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

– для нескольких попарно несовместных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Два случайных события называются ***независимыми***, если вероятность одного из них не изменяется при появлении или непоявлении другого. В противном случае события называются ***зависимыми***.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло, называется ***условной вероятностью*** и обозначается $P(B/A)$. Если события A и B независимы, то: $P(A) = P(A/B)$; $P(B) = P(B/A)$.

Несколько событий называются ***независимыми*** в совокупности, если каждое из них не зависит от произведения любого числа других.

Теорема умножения вероятностей:

– для двух зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ или } P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B);$$

– для нескольких зависимых событий:

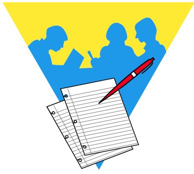
$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1});$$

– для двух независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B);$$

– для нескольких независимых в совокупности событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$



ПРИМЕРЫ

89. В ящике 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара при извлечении 1 шара.

РЕШЕНИЕ.

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A): $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Вероятность появления синего шара (событие B): $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

События A и B несовместны (появление одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому по теореме сложения для несовместных событий получаем: $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

90. Найти вероятность выпадения числа очков, кратного двум или трем, при однократном подбрасывании игральной кости.

РЕШЕНИЕ.

Пусть A – выпадение числа очков, кратного двум, B – выпадение числа очков, кратного трем. События совместны в случае выпадения «6». В этом случае следует пользоваться теоремой сложения вероятностей для совместных событий: $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) – \mathrm{P}(AB)$.

В данном случае: $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cdot B)=\frac{1}{6}$.

Следовательно, $\mathrm{P}(A+B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

91. Найти вероятность появления двух гербов при одном бросании двух монет.

РЕШЕНИЕ.

Вероятность появления герба при бросании первой монеты (событие A): $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$. Вероятность появления герба при бросании второй монеты (событие B): $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$. Так как события независимые, то искомая вероятность по теореме умножения равна: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

92. В ящике находятся 20 стандартных деталей и 5 нестандартных. Из ящика по одной извлекают две детали. Какова вероятность того, что первой будет извлечена стандартная деталь, а второй – нестандартная?

РЕШЕНИЕ.

Вероятность того, что первая деталь окажется стандартной (событие A): $P(A) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Вероятность того, что вторая деталь окажется нестандартной (событие B), вычисленная в предположении, что первая деталь – стандартная, т. е. условная вероятность равна: $P(B/A) = \frac{5}{24}$.

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей для зависимых событий равна: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

93. В партии из 10 деталей – 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

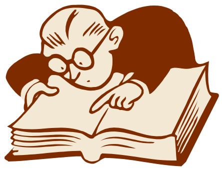
РЕШЕНИЕ.

События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной» – противоположные. Обозначим первое событие через A, а второе через $\overline{A}$.

Вероятность того, что первая извлеченная деталь окажется нестандартной, равна $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Вероятность того, что вторая извлеченная деталь окажется нестандартной, при условии, что первая деталь была нестандартной, равна $\frac{1}{9}$. По теореме умножения вероятностей для зависимых событий: $P(\overline{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$.

Искомая вероятность равна: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$.

Ответ: $\frac{44}{45}$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

94. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

95. В партии из 50 изделий – 35 первого сорта, 10 – второго и 5 бракованных изделий. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется: 1) первого сорта; 2) второго сорта; 3) небракованной.

96. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что в наугад отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

97. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

98. На станции отправления имеется 8 заказов на отправку товара: 5 – внутри страны и 3 – на экспорт. Какова вероятность того, что 2 выбранных наугад заказа окажутся предназначенными для потребления внутри страны?

99. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в мишень, равна 0,9. Стрелок произвел 2 выстрела. Найти вероятность того, что из 2 выстрелов:

1) 2 попадания;
2) 2 промаха;
3) 1 попадание;
4) хотя бы 1 попадание.

100. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартные), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что:

1) обе детали окажутся стандартными;
2) 1 деталь стандартная;
3) обе нестандартные;
4) по крайней мере 1 стандартная.

101. Вероятность получения кредита для первого лица равна 0,6, а для второго – 0,5. Найти вероятность того, что кредит получат:

1) оба;

2) один из двух;
3) хотя бы один из двух.

102. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% – первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется первого сорта.

103. Длительными наблюдениями было установлено, что 90% предприятий проверяются налоговой инспекцией в течение определенного времени. Из общего количества проверенных, у 40% находят определенные нарушения. Найти вероятность того, что некоторое предприятие проверят и найдут нарушения.

104. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

105. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором 2 вопроса.

106. Вероятность несвоевременной уплаты налогов для трех предпринимателей соответственно равна 0,1; 0,15; 0,2. Найти вероятность того, что несвоевременно уплатят налоги:
1) 3 предпринимателя;
2) один из предпринимателей;
3) не более двух предпринимателей.

107. Вероятность прибыльной деятельности для первой фирмы равна 0,8; для второй – 0,9; для третьей – 0,7. Найти вероятность того, что прибыльными будут ровно две фирмы.

108. Вероятность полного расчета за электроэнергию для первого завода равна 0,5; для второго – на 20% больше. Найти вероятность своевременной оплаты за электроэнергию ровно одним заводом.

109. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик вместимостью в 100 монет 1 фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взятые наудачу по одной в каждом из 100 ящиков. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачен?

110. Каждая из букв **А**, **А**, **А**, **А**, **А**, **Б**, **Б**, **Д**, **К**, **Р**, **Р** написана на одной из карточек разрезной азбуки. Какова вероятность того, что ребенок, не умеющий читать, сложит из них слово «**АБРАКАДАБРА**»?

111. Вероятность того, что первый студент решит задачу, равна 0,75; вероятность того, что второй студент решит ту же задачу, равна 0,8. Найти вероятность того, что задача будет решена, если оба студента будут решать ее независимо друг от друга.

112. Количество грузовых автомобилей, которые проезжают по шоссе, на котором находится бензоколонка, относится к количеству легковых автомобилей, которые проезжают по этому же шоссе, как 3:2. Известно, что в среднем 1 из 30 грузовых и 2 из 50 легковых автомобилей подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что:

1) к бензоколонке подъедет грузовой автомобиль и будет заправляться?

2) к бензоколонке подъедет легковой автомобиль и будет заправляться?

3) автомобиль, который подъедет к бензоколонке, будет заправляться?

113. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью 0,8, а третий для вынесения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью 0,8. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

114. Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в игре в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своих отца и матери по одной из схем: отец – мать – отец или мать – отец – мать по выбору сына. Вероятность выигрыша у отца равна 0,4; у матери – 0,7. Какую схему следует выбрать сыну?

115. Вероятность обслуживания клиента одним оператором в банке равна 0,6. Какое минимальное число операторов должно работать в банке, чтобы вероятность обслуживания клиента была не менее 0,95?

116. Предприниматель решил вложить свои средства поровну в 2 контракта, каждый из которых принесет ему прибыль в размере 100%. Вероятность того, что любой из контрактов не «лопнет», равна 0,8. Какова вероятность того, что по истечении контрактов предприниматель по меньшей мере ничего не потеряет?

117. Инвестор решил вложить поровну средства в 3 предприятия при условии возврата ему через определенный срок 150% от вложенной суммы каждым предприятием. Вероятность банкротства каждого предприятия 0,2. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

118. Два игрока по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого первым выпадает герб. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

1.6. *Формула полной вероятности. Формула Байеса*

Пусть событие A может наступить только одновременно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют ***гипотезами***.

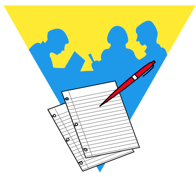
Тогда вероятность события A вычисляется по формуле ***полной вероятности***:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\cdot \mathrm{P}(A/H_1) + \mathrm{P}(H_2)\cdot \mathrm{P}(A/H_2) + \ldots + \mathrm{P}(H_n)\cdot \mathrm{P}(A/H_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j)\cdot \mathrm{P}(A/H_j).$$

Пусть известно, что событие A произошло. Событие A может произойти совместно только с одной из гипотез. Если до опыта вероятности гипотез были $\mathrm{P}(H_1), \mathrm{P}(H_2), \ldots, \mathrm{P}(H_n)$, то после опыта, в результате которого произошло событие A, могут быть вычислены условные вероятности $\mathrm{P}(H_i/A)$ по **формуле Байеса**:

$$\mathrm{P}(H_i/A) = \frac{\mathrm{P}(H_i)\cdot \mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_i)\cdot \mathrm{P}(A/H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j)\cdot \mathrm{P}(A/H_j)} \quad (i = \overline{1,\, n}).$$



ПРИМЕРЫ

119. На двух автоматических станках производятся одинаковые детали. Вероятность изготовления детали высшего сорта на первом станке равна 0,92, а на втором – 0,8. Изготовленные на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Среди них деталей, изготовленных на первом станке, в 3 раза больше, чем на втором. Определить вероятность того, что наугад взятая деталь окажется высшего сорта.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через A событие – взятая наугад деталь высшего сорта. Можно сделать два предположения: 1) гипотеза H_1 – деталь изготовлена на первом станке; 2) гипотеза H_2 – деталь изготовлена на втором станке. Поскольку деталей, произведенных на первом станке, в три раза больше, чем на втором, то: $\mathrm{P}(H_1) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{1}{4}$.

По условию задачи имеем: $P(A/H_1) = 0{,}92$ (условная вероятность того, что деталь будет высшего сорта, если она изготовлена на первом станке); $P(A/H_2) = 0{,}8$ (условная вероятность того, что деталь будет высшего сорта, если она изготовлена на втором станке).

Искомую вероятность того, что наугад взятая деталь окажется высшего сорта, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}92 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}8 = 0{,}89.$$

Ответ: 0,89.

120. В первой коробке содержится 20 деталей, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наугад взята деталь и переложена в первую. Найти вероятность того, что деталь, наугад извлеченная после этого из первой коробки, будет стандартной.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через A событие – из первой коробки извлечена стандартная деталь. Из второй коробки могла быть извлечена и переложена в первую либо стандартная деталь (гипотеза H_1), либо нестандартная (гипотеза H_2). Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная деталь: $P(H_1) = \frac{9}{10}$. Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная деталь: $P(H_2) = \frac{1}{10}$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная деталь, равна: $P(A/H_1) = \frac{19}{21}$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная деталь, равна: $P(A/H_2) = \frac{18}{21}$.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная деталь, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9.$$

Ответ: 0,9.

121. Имеются три ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули шар, оказавшийся белым. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Р Е Ш Е Н И Е.

Пусть событие A – извлечение белого шара; H_1, H_2, H_3 – гипотезы, состоящие в выборе соответственно первого, второго и третьего ящика. Так как выбор любого из ящиков равновозможен, то: $\mathrm{P}(H_1)=\mathrm{P}(H_2)=\mathrm{P}(H_3)=\frac{1}{3}$.

Вероятность извлечения белого шара из первого ящика: $\mathrm{P}(A/H_1)=\frac{20}{20}=1$.

Вероятность извлечения белого шара из второго ящика: $\mathrm{P}(A/H_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

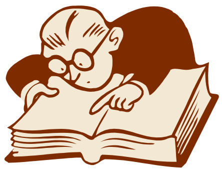
Вероятность извлечения белого шара из третьего ящика: $\mathrm{P}(A/H_3) = 0$.

Искомую вероятность находим по формуле Байеса:

$$\mathrm{P}(H_1/A)=\frac{\mathrm{P}(H_1)\cdot\mathrm{P}(A/H_1)}{\mathrm{P}(H_1)\cdot\mathrm{P}(A/H_1)+\mathrm{P}(H_2)\cdot\mathrm{P}(A/H_2)+\mathrm{P}(H_3)\cdot\mathrm{P}(A/H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

122. Налоговые инспекторы делают проверку деятельности предприятий: первый обслуживает 30 предприятий, среди которых 25% не имеют задолженностей, другой – 70 предприятий, из них 40% без задолженностей. Какова вероятность того, что наугад взятое предприятие не имеет задолженностей?

123. Тираж популярной газеты печатается в двух типографиях. Мощности двух типографий относятся как 3:4, причем первая дает в среднем 3% брака, а вторая – 2%. Какова вероятность того, что наугад выбранный экземпляр газеты будет бракованным?

124. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный случайным образом, выполнит норму.

125. Студент знает не все экзаменационные вопросы. В каком случае вероятность вытащить неизвестный вопрос будет для него наименьшей: когда он тянет билет первым, вторым … или последним?

126. Имеются урны трех составов шаров:

1) три урны по 2 белых и 1 черному шару в каждой;
2) одна урна с 10 черными шарами;
3) две урны по 3 белых и 1 черному шару в каждой.

Наугад выбирается урна и из нее шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

127. Один властелин, которому наскучил министр со своими неудачными советами, решил казнить его. Однако он предоставил возможность министру выжить. Ему было велено распределить по двум урнам 2 белых и 2 черных шара. Палач выберет наугад урну и из нее достанет шар. Если шар будет черным, министра казнят, белым – помилуют. Каким образом министр должен распределить шары в урнах, чтобы обеспечить себе наибольшую вероятность остаться в живых?

128. Имеются две урны: в первой 7 белых и 3 черных шара, во второй – 7 белых и 6 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

129. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Какова вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

130. В ящике лежит 20 теннисных мячей: 12 новых и 8 игранных. Из ящика наугад извлекаются 2 мяча для игры и после нее возвращаются в ящик. Затем из ящика вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что эти оба мяча будут неигранными.

131. В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

132. В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наугад извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.

133. Два экономиста заполняют документы, которые складываются в общую папку. Вероятность сделать ошибку в документе для первого экономиста – 0,1, для второго – 0,3. Первый экономист заполнил 40 документов, второй – 60. Наугад взятый из папки документ оказался с ошибкой. Определить вероятность того, что его заполнил первый экономист.

134. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

135. У мальчика в левом кармане 3 конфеты «Белочка» и одна конфета «Маска», а в правом – 2 «Белочки» и 2 «Маски». Он достал 2 конфеты из одного кармана и оказалось, что одна из них «Белочка», а другая «Маска». Чему равна вероятность того, что он достал конфеты из левого кармана? Из правого?

136. Три охотника сделали по одному выстрелу, в результате чего волк оказался убит одной пулей. Известно, что первый охотник стреляет успешно в 80%, второй – в 60%, а третий – в 50% случаев. Шкуру волка продали за 390 ден. ед. Как охотникам разделить между собой выручку, если они не знают, кем из них был убит волк?

137. В кассу предприятия поступили банкноты в пачках от двух банков: 50 пачек от первого и 70 – от второго. Известно, что кассиры первого банка допускают ошибки при формировании пачек в среднем 1 раз из 1000, а второго – 1 раз из 500. Какова вероятность того, что:

а) наугад выбранная пачка сформирована без ошибок?

б) пачка была сформирована кассирами второго банка, если она оказалась сформированной без ошибок?

138. В рекламном агентстве работает три группы дизайнеров: первая обслуживает 25 фирм, вторая – 45, третья – 40. Известно, что в среднем 40% фирм, которые обслуживаются дизайнерами первой группы, возвращают деньги, потраченные на рекламу, в течение первого месяца. Для дизайнеров второй и третьей групп – соответственно 45% и 35% фирм. Какова вероятность того, что:

а) выбранная наугад фирма окупила затраченные на рекламу деньги в течение месяца?

б) фирма, окупившая затраты в течение месяца, обслуживалась дизайнерами третьей группы?

139. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все детали подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком – с вероятностью 0,06. Найти вероятность того, что:

а) взятое наугад изделие признано годным;

б) признанное годным изделие действительно не содержит брака.

140. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% – государственные органы, 30% – другие банки, остальные – физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01; 0,05; 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Какова вероятность того, что данный кредит не возвращает какой-то банк?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Чем отличаются теоремы сложения для совместных и несовместных событий?
2. Можно ли перенести теоремы сложения и умножения вероятностей на случай нескольких событий? Как они формулируются?
3. Какие из перечисленных утверждений верны?

   а) $p(A\cdot\overline{A})=0$; б) $p(A\cdot\overline{A})=1$; в) $p(A+\overline{A})=0$; г) $p(A+\overline{A})=1$.
4. Для каких событий A и B справедливо равенство

   $$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B)?$$
5. Расположите следующие события в порядке неубывания их вероятностей: $\varnothing$, U, A, $A + B$, $A\cdot B$.
6. Дано: $P(A) > 0{,}5$; $P(B) > 0{,}8$. Верно ли, что $P(AB) > 0{,}2$?
7. В семье двое детей. Что более вероятно: они разнополые или однополые?
8. Чему равна вероятность наступления хотя бы одного из событий полной группы несовместных событий?
9. Совместные или несовместные события A и B, если $p(A) = 2/3$, $p(B) = 1/2$?
10. Зависимые или независимые события A и B, если:

    а) $p(A) = 2/9$, $p(B) = 3/4$, $P(AB) = 1/6$;

    б) $p(A) = 3/7$, $p(B) = 7/9$, $P(AB) = 1/4$.

11. Дано: p(A) = 0,6; p($A + B$) = 0,8; p(AB) = 0,5. Найти p(B), p(B/A), p(A/B). Зависимы ли события A и B?

1.7. *Повторение испытаний. Формула Бернулли*

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A. Вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же и равна p.

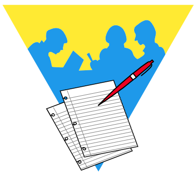
Тогда вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз, может быть вычислена по формуле Бернулли:

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } \quad q = 1 - p.$$

Наивероятнейшее число k появления события A в серии из n независимых испытаний удовлетворяет неравенствам:

$$np - q \le k \le np + p.$$

Если $np - q$ не является целым числом, то значение k – единственное. Если $np - q$ и, следовательно, $np + p$ – целые числа, то наивероятнейших значений два: $k_1 = np - q$; $k_2 = np + p$.



ПРИМЕРЫ

141. В случайно выбранной семье 5 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, определить вероятность того, что в данной семье: 1) три девочки и два мальчика; 2) не более трех девочек.

РЕШЕНИЕ.

Пусть A – событие, состоящее в рождении девочки. Его вероятность: $p = \frac{1}{2}$; вероятность рождения мальчика: $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

1) Искомая вероятность того, что в семье из n = 5 детей будет k = 3 девочки, вычисляется по формуле Бернулли:

$$\mathrm{P}_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

2) Если обозначить через A событие – в семье не более трех девочек, то противоположное $\overline{A}$ – в семье более трех девочек (т. е. 4 или 5) Имеем:

$$\mathrm{P}_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^{5-4} = C_5^1 \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$ (вероятность того, что в семье 4 девочки);

$$\mathrm{P}_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^{5-5} = 1 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = \frac{1}{32}$$ (вероятность того, что в семье 5 девочек).

Следовательно,

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\mathrm{P}_5(4) + \mathrm{P}_5(5)\right) = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

Ответ: 1) 0,3125; 2) 0,8125.

142. В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают подряд n шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара, если:

1) $n = 13$, 2) $n = 19$.

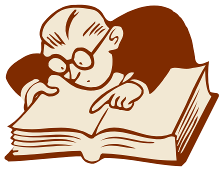
РЕШЕНИЕ.

Вероятность вынуть белый шар из урны при каждом испытании равна $p = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$. Тогда $q = 1 - p = \frac{4}{5}$. Найдем наивероятнейшее число k из двойного неравенства: $np - q \le k \le np + p$.

1) Подставив данные задачи, получим: $13 \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \le k \le 13 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, т. е.: $\frac{9}{5} \le k \le \frac{14}{5} \Rightarrow 1{,}8 \le k \le 2{,}8$. Так как k – целое число, то искомое наивероятнейшее число $k = 2$.

2) Подставив $n = 19$, $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{4}{5}$, получим: $\frac{19}{5} - \frac{4}{5} \le k \le \frac{19}{5} + \frac{1}{5}$, т. е.: $3 \le k \le 4$. Таким образом, есть два наивероятнейших значения: $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$.

Ответ: 1) $k = 2$; 2) $k_1 = 3$, $k_2 = 4$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

143. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

144. Найти вероятность того, что в семье с пятью детьми число мальчиков отличается от числа девочек на 1.

145. Каждый седьмой клиент банка приходит в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 6 человек. Найти вероятность того, что из них будут брать проценты:

а) только 2 человека;
б) не менее 5 человек;
в) хотя бы 1 человек.

146. Предположим, вы решили лететь в город N на самолете и у вас есть выбор: лететь на двухмоторном или на четырехмоторном самолете. Моторы у самолетов одинаковые, и каждый с вероятностью p может отказать во время полета. От знакомых авиаторов вы знаете, что двухмоторный самолет способен долететь до N и на одном моторе, а четырехмоторный – на 3 или даже на 2 моторах, а на одном уже не может. Какой самолет надежнее? Решить задачу при условии, что:

а) $p = 0{,}3$; б) $p = 0{,}4$.

147. Таможня дает официальную оценку того, что в среднем из 100 человек, которые возвращаются из-за границы, 20 человек не декларируют весь товар, облагаемый налогом. Случайным образом отобраны 7 человек, которые возвращаются из-за границы. Какова вероятность того, что:

а) они все задекларируют весь товар, облагаемый налогом;
б) не менее 3;
в) не более 2.

148. Два шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Первый игрок выигрывает у второго в два раза чаще, чем второй у первого. Во сколько раз вероятность выигрыша всей игры первым игроком больше вероятности выигрыша всей игры вторым игроком?

149. В агентство недвижимости обращаются по поводу аренды и продажи квартир в соотношении 7:5. Какова вероятность того, что среди 6 произвольно выбранных заявок, будет:

а) 4 на продажу квартир?
б) не менее 4 на аренду квартир?

150. Импортер поставляет горизонтальные и вертикальные жалюзи для окон, причем горизонтальных в 3 раза больше, чем вертикальных. Какова вероятность того, что среди 4 отобранных жалюзи будет:

а) 3 горизонтальных?

б) не менее 3 горизонтальных?

151. Дополнительного оснащения нового автомобиля требует каждый седьмой покупатель автосалона. Какова вероятность того, что среди 8 наугад выбранных покупателей авто:

а) будет не более 2 с дополнительными требованиями?

б) хотя бы 1 не будет требовать дополнительного оснащения?

152. Банк имеет 5 отделений. С вероятностью 0,1 независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет:

а) ровно 4 заявки?

б) хотя бы 1 заявка?

в) заявка от первого отделения, если поступило 2 заявки?

153. Предприятие изготавливает аудиотехнику, 3% которой имеет дефекты. Для контроля из партии аппаратуры наугад выбирается 5 изделий. Если изделие имеет дефект, то при проверке его обнаруживают в 94 случаях из 100. Какова вероятность того, что дефект будет обнаружен:

а) только в 1 изделии?

б) хотя бы в 1 изделии?

154. Сколько раз необходимо бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньше 1/2 можно было ожидать появления шести очков хотя бы в одном случае?

155. Кафе обслуживает посетителей, 15% которых являются постоянными клиентами. Какое минимальное количество посетителей нужно отобрать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 зафиксировать хотя бы 1 постоянного клиента?

156. Автоматический станок изготовляет 2/3 числа деталей первого сорта и 1/3 – второго сорта. Определить наивероятнейшее число изделий первого сорта:

1) среди 5 случайно отобранных деталей;
2) среди 10 деталей.

157. По имеющимся данным в среднем 90% числа производимых цехом изделий не имеют дефектов. Какое наивероятнейшее число изделий, не имеющих дефектов, окажется среди отобранных случайным образом:

1) 19 образцов;
2) 30 образцов?

158. В среднем каждая двадцатая налоговая накладная содержит ошибку. Сколько налоговых накладных нужно взять, чтобы наивероятнейшее число накладных без ошибок было 70?

159. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,4. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания в мишень, если стрелки произведут 25 выстрелов.

1.8. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с одной и той же постоянной, отличной от 0 и 1 вероятностью p, то вероятность $\mathrm{P}_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз, приближенно равна:

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значение функции $\varphi(x)$ для неотрицательных значений x приведены в прил. 2. Для всех значений $x > 4$ будем считать $\varphi(x) = 0$. Для отрицательных значений x используем эту же таблицу, так как функция $\varphi(x)$ четная, т. е.: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с одной и той же постоянной, отличной от 0 и 1 вероятностью p, то вероятность того, что событие A появится ровно k раз, где k заключено между k_1 и k_2, приближенно равна:

$$\mathrm{P}_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $\quad x''=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x'=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\Phi(x)$ для $x\in[0, 4]$ приведены в прил. 3. Для всех значений $x>4$ будем считать $\Phi(x)=0{,}5$. Для отрицательных значений x применяем эту же таблицу, используя то, что функция $\Phi(x)$ нечетная, т. е.: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

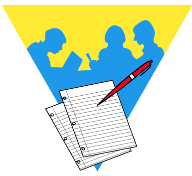
Формула Пуассона

Если вероятность p наступления события в отдельном испытании близка к нулю, то даже при большом числе испытаний n, но при небольшом значении произведения np, получаемые по формуле Лапласа, значения вероятностей $P_n(k)$ оказываются недостаточно точными и возникает потребность в другой приближенной формуле.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но мала, число независимых испытаний n достаточно велико, но значение произведения $np=\lambda$ остается небольшим (не больше десяти), то вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит k раз приближенно равна:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Для упрощения расчетов с применением формулы Пуассона составлена таблица значений функции Пуассона: $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=F(k,\ \lambda)$ (см. прил. 1).



ПРИМЕРЫ

160. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

РЕШЕНИЕ.

По условию $n=100$, $k=75$, $p=0{,}8$, $q=1-p=0{,}2$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа: $P_n(k)\approx\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$.

Вычислим x: $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\dfrac{5}{4} = -1{,}25$.

Функция $\varphi(x)$ – четная, поэтому $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25)$. По таблице (см. прил. 2) найдем $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$. Искомая вероятность:

$$P_{100}(75) \approx \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$$

Ответ: $P_{100}(75) = 0{,}04565$.

161. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

РЕШЕНИЕ.

По условию $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(70 \le k \le 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25.$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{20}{8} = 2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим: $P_{400}(70 \le k \le 100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25)$. По таблице (см. прил. 3) находим: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$, $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Искомая вероятность: $P_{400}(70 \le k \le 100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

Ответ: $P_{400}(70 \le k \le 100) = 0{,}8882$.

162. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут:

1) ровно три элемента;
2) менее трех элементов;
3) хотя бы один элемент.

РЕШЕНИЕ.

1) Требуемую вероятность вычисляем по формуле Пуассона, так как число $n = 1000$ велико, а вероятность отказа элемента $p = 0{,}002$ мала.

Вычисляем $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$. По таблице (см. прил. 1) находим требуемую вероятность ($\lambda = 2$, $k = 3$):

$$P_{1000}(3) = F(3; 2) = 0{,}1804.$$

2) Найдем вероятность того, что за время T откажут менее 3 элементов:

$$P_{1000}(k < 3) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = F(0; 2) + F(1; 2) + F(2; 2).$$

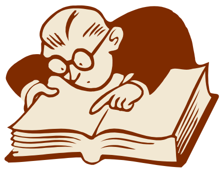
По таблице (см. прил. 1) находим вероятности $F(0; 2)$, $F(1; 2)$, $F(2; 2)$ ($\lambda = 2$, $k = 0; 1; 2$):

$$P_{1000}(k < 3) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767.$$

3) Найдем вероятность того, что откажет хотя бы один элемент. Рассмотрим противоположное событие: за время Т отказов элемента не будет. Вычисляем вероятность этого события: $P_{1000}(0) = F(0; 2) = 0{,}1353$.

Так как сумма вероятностей $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, то требуемая вероятность $P = 1 - P_{1000}(0) = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$.

Ответ: 1) 0,1804; 2) 0,6767; 3) 0,8647.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

163. Монета брошена 400 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 220 раз.

164. По данным технического контроля в среднем 10% изготовляемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 400 изготовленных часов 350 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

165. Из 300 испеченных Фрекен Бок плюшек каждая с вероятностью 0,75 доставалась Карлсону. Найти вероятность того, что остальным членам семьи досталось ровно 85 плюшек.

166. Вероятность обращения клиента в банк за возвратом депозита равна 0,2. Найти:

а) вероятность того, что из 400 клиентов, посетивших банк, ровно 100 потребуют возврата депозита;

б) наивероятнейшее число таких клиентов.

167. Налоговая служба определила, что в среднем половина всех деклараций о доходе содержит по крайней мере одну ошибку. На столе инспектора лежит папка, в которой 100 деклараций. Какова вероятность того, что ровно 40 из них содержат ошибки?

168. Каждый двадцатый кредит, выданный банком, не возвращается в срок. В этом году банк планирует выдать около 1900 кредитов. Найти вероятность того, что в срок не будут возвращены:

а) не более 90 кредитов;

б) не менее 80, но не более 120 кредитов;

в) более 125 кредитов.

Найти наивероятнейшее число невозвращенных в срок кредитов.

169. Банк выдает кредитные карточки VISA. Было установлено, что 40% всех счетов оплачивается полностью с их помощью. Было выбрано наугад 600 счетов. Какова вероятность того, что с помощью карточек VISA оплачено:

а) не менее 220 счетов?

б) от 200 до 250 счетов?

в) более 275 счетов?

170. В среднем каждый десятый абонент пейджинговой связи не получает отправленного ему сообщения. Найти вероятность того, что среди 900 отправленных сообщений будет:

а) ровно 790 полученных;

б) не более 60 неполученных.

171. Фирма выполняет полиграфические работы, причем в среднем четверть всех заказов приходится на изготовление визитных карточек. Найти вероятность того, что среди 300 клиентов:

а) 85 закажут визитные карточки;

б) не более 60 закажут визитные карточки.

172. Если в среднем левши составляют 1% общего числа студентов, то каковы шансы на то, что среди 200 студентов второго курса окажется:

а) ровно четверо левшей;

б) не менее 4.

173. На факультете 700 студентов. Найти:

а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 31 декабря;

б) вероятность того, что в этот день родились 3 студента;

в) хотя бы 1 студент.

174. Владельцы кредитных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели кредитную карточку для произвольного владельца равна 0,001. Всего банк выдал карточки

2000 клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна:

а) хотя бы 1 карточка;

б) ровно 1 карточка.

Найти наивероятнейшее число карточек, теряемых за неделю.

175. Локальная сеть состоит из 100 компьютеров. Вероятность сбоя в работе в течение суток для каждого из них равна 0,002. Какова вероятность того, что в течение суток сбой произойдет в работе не более чем 3 компьютеров?

176. Энергетическая компания обслуживает 800 потребителей электроэнергии. Перебои в подаче энергии на протяжении суток возникают с вероятностью 0,005. Какова вероятность того, что в течение суток будет получено не более 9, но не менее 4 сообщений о перебоях?

177. При транспортировке изделий из стекла в среднем из каждой сотни повреждается 3 изделия. Какова вероятность того, что партия из 250 изделий после транспортировки со склада в магазин:

а) не будет содержать поврежденных изделий?

б) будет содержать не более 2 поврежденных изделий?

Найти наивероятнейшее число поврежденных изделий.

178. В страховом обществе застраховано 10000 лиц. Вероятность несчастного случая в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января 20 ден. ед. страховых, а в случае несчастного случая получает от общества 1000 ден.ед. Найти вероятность того, что:

а) общество потерпит убыток;

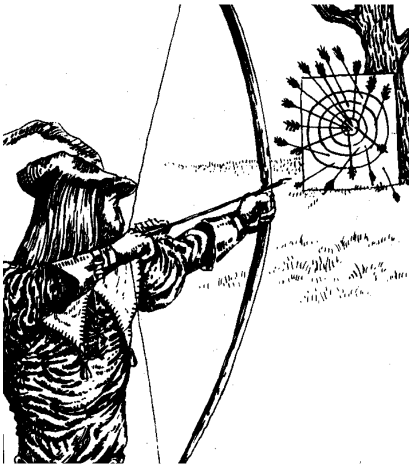
б) общество получит прибыль не меньшую 40 000 ден. ед.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определить вероятность того, что в серии n независимых испытаний по схеме Бернулли событие наступит:

а) ровно k раз;	б) менее k раз;	в) более k раз;
г) не менее k раз;	д) не более k раз;	е) хотя бы 1 раз.

2. Чем похожи и чем отличаются локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа?
3. Чем похожи и в чем различие условий применения теорем Муавра–Лапласа и формулы Пуассона?



Случайные величины

Случайная величина – переменная величина, конкретное значение которой зависит от случая.

Например, температура воздуха в 13 часов 1 июня в Киеве; номер грани, выпадающий при бросании кости; скорость самолета в данный момент времени и т. д.

1.9. *Дискретная случайная величина*

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой могут быть пронумерованы (число возможных значений конечное или счетное).

Для характеристики СВ необходимо знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют ***закон распределения*** случайной величины.

Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями 1/6 для каждого значения от 1 до 6.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, первая строка которой содержит всевозможные значения x_i случайной величины X, а вторая – вероятности $p_i = P(X = x_i)$. В случае конечного числа возможных значений таблица имеет вид:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

В связи с тем, что случайная величина X в результате испытания обязательно принимает одно и только одно из возможных значений x_i, события $X = x_i$ образуют полную группу и, следовательно, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Случайная величина может принимать бесконечное число значений $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ В этом случае: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е.: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$ при всех значениях x.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е., если $b > a$, то $F(b) \ge F(a)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$,

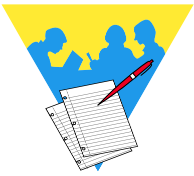
где $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Вероятность попадания случайной величины X на интервал $[a, b)$ определяется формулой: $\mathrm{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \mathrm{P}(X = x_i),$$

где суммирование производится по всем значениям индекса i, для которых $x_i < x$.



ПРИМЕР

179. Монета подбрасывается два раза. Случайная величина X – число выпавших гербов. Требуется:

1) составить закон распределения случайной величины;
2) найти функцию распределения и построить ее график;
3) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал [0,5; 3).

РЕШЕНИЕ.

1) Дискретная случайная величина X может принимать следующие значения: $x_1 = 0$ (герб не выпал ни разу), $x_2 = 1$ (герб выпал один раз), $x_3 = 2$ (герб выпал два раза). Вероятности этих значений вычисляем по формуле Бернулли: $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}_n(k) = C_n^k \cdot \mathrm{p}^k \cdot q^{n-k}$.

В данном случае: $n = 2$, $\mathrm{p} = 0{,}5$, $q = 1 - \mathrm{p} = 0{,}5$;

$$p_1 = \mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}_2(0) = C_2^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25;$$

$$p_2 = \mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}_2(1) = C_2^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$p_3 = \mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}_2(2) = C_2^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25\,.$$

Получаем следующий закон распределения случайной величины:

X	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

Контроль вычислений: $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathrm{p}_i = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1.$

2) Найдем функцию распределения случайной величины X.

Если $x \le 0$, то $F(x) = \mathrm{P}(X < x) = 0$.

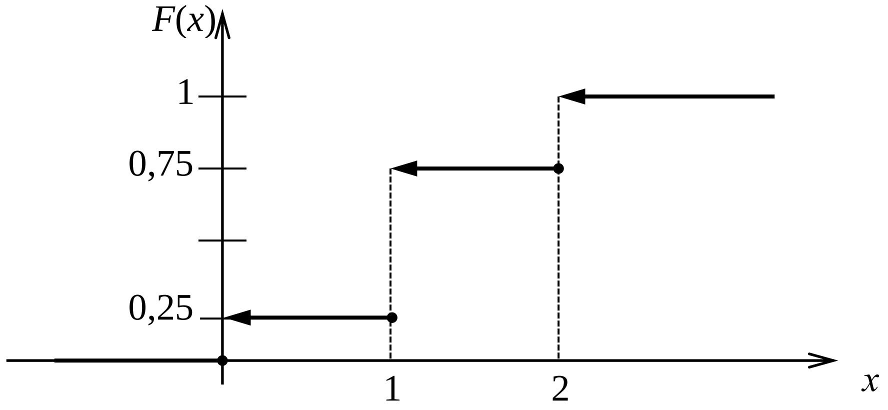
Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = 0) = 0{,}25$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) = 1$.

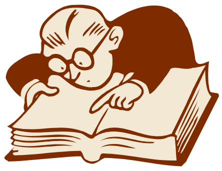
Таким образом: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 0{,}25 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}75 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Строим график функции распределения $F(x)$:



3) Вероятность попадания случайной величины X на интервал [0,5; 3) вычисляем по формуле: $\mathrm{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. В данном случае $a = 0{,}5$, $b = 3$.

Получаем: $\mathrm{P}(0{,}5 \le X < 3) = F(3) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

180. Вероятность повышения курса акций первого предприятия равна 0,8; второго – 0,6; третьего – 0,7. Случайная величина X – число предприятий, курс акций которых повысился. Найти закон распределения случайной величины X.

181. Вероятность того, что банкомат при введении кода сработает правильно, равна 0,97. Составить закон распределения количества введений кода в банкомат до первого правильного срабатывания банкомата.

182. Согласно статистическим данным, 7% трудоспособного населения – безработные. Наугад выбрано 4 человека. Построить закон распределения случайной величины X, которая определяет число безработных среди этих 4 человек.

183. Партия задекларированного товара, насчитывающая 100 изделий, содержит 4 изделия, не соответствующих стандартам. Таможенник выбирает из партии 1 изделие и проверяет его качество. Если это изделие не соответствует требованиям, то партия задерживается и проверка дальше уже не проводится. Если изделие соответствует требованиям, то таможенник для проверки берет следующие изделие и т. д. Всего он проверяет не более 3 изделий. Составить закон распределения случайной величины X – числа проверенных изделий.

184. Из партии в 25 изделий, среди которых 5 бракованных, случайным образом выбраны 3 изделия для проверки их качества. Построить закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий.

185. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	0	1	2
p	0,2	a	0,3	0,1

Требуется:

1) определить параметр a;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал [–1; 1,5).

186. Дискретная случайная величина Y задана законом распределения:

Y	–1	0	2	3
p	0,3	0,1	0,3	a

Требуется:

1) определить параметр a;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) вычислить вероятность попадания случайной величины Y на интервал [0,5; 4,2).

187. Дискретная случайная величина Z задана законом распределения:

Z	0	1	3	5
p	a	0,2	0,1	0,2

Требуется:

1) определить параметр a;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) вычислить вероятность попадания случайной величины Z на интервал [–2; 4).

188. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4	6
p	0,1	0,4	a	0,2

Требуется:

1) определить параметр a;
2) построить функцию распределения $F(x)$;
3) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал [0; 3).

189. Вероятностный прогноз для величины X – процентного роста стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение 6 месяцев – дан в виде закона распределения:

X	5	10	15	20	25	30
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 36% годовых.

190. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, а вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин X и Y – числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудиями.

191. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, а вторым – 0,8. Начинает сбрасывать бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками.

1.10. *Действия над случайными величинами*

1. ***Умножение на константу***

Произведением случайной величины X на постоянную величину C называется случайна величина $Y = C \cdot X$, все значения которой являются значениями X, умноженными на C, с вероятностями, равными вероятностям соответствующих значений X.

2. ***Возведение в степень***

N-й степенью случайной величины X называется случайная величина $Y = X^n$, все значения которой равны n-й степени значений X, а соответствующие вероятности те же, что и у значений X.

3. ***Сложение случайных величин***

Две дискретные случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если независимы события $X = x_i$ и $Y = y_j$ при любых возможных i и j. В противном случае величины называются ***зависимыми***.

Суммой двух дискретных случайных величин X и Y называется случайная величина $Z = X + Y$, принимающая значения всевозможных сумм $x_i + y_j$ с вероятностями, равными: $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j)$ в случае независимых X и Y и с вероятностями: $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i)$ в случае их зависимости.

4. ***Разность случайных величин***

Разностью $X - Y$ двух случайных величин X и Y называется сумма двух случайных величин X и $-Y$, т. е.:

$$X - Y = X + (-Y).$$

5. ***Умножение случайных величин***

Произведением двух случайных величин называется случайная величина $X \cdot Y$, принимающая значения всевозможных произведений $x_i \cdot y_j$ с вероятностями: $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j)$ в случае независимых X и Y и с вероятностями: $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i)$ в случае их зависимости.

ПРИМЕР

192. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	–1	1	2
p	0,4	0,3	0,3

Z	0	1
p	0,4	0,6

Найти законы распределения случайных величин: $Y_1 = 2 \cdot X$, $Y_2 = X^2$, $Y_3 = X + Z$, $Y_4 = X \cdot Z$, $Y_5 = 2X - 4Z$.

РЕШЕНИЕ.

1) Рассмотрим $Y_1 = 2 \cdot X$.

Находим закон распределения случайной величины Y_1:

Y_1	$2 \cdot (-1)$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$
p	0,4	0,3	0,3

После вычислений получаем таблицу:

Y_1	–2	2	4
p	0,4	0,3	0,3

2) Рассмотрим $Y_2 = X^2$.

Находим закон распределения случайной величины Y_2:

Y_2	$(-1)^2$	1^2	2^2
p	0,4	0,3	0,3

После вычислений получаем таблицу:

Y_2	1	1	4
p	0,4	0,3	0,3

Мы получили одинаковые значения x_1^2 и x_2^2. Следовательно, событие $Y_2 = 1$ есть сумма несовместных событий: $X^2 = x_1^2 = (-1)^2$ и $X^2 = x_2^2 = 1^2$, поэтому: $P(Y_2 = 1) = P(X^2 = (-1)^2) + P(X^2 = 1^2) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.

Окончательно получаем закон распределения случайной величины Y_2:

Y_2	1	4
p	0,7	0,3

3) Рассмотрим $Y_3 = X + Z$.

Находим закон распределения случайной величины Y_3:

Y_3	$-1 + 0$	$-1 + 1$	$1 + 0$	$1 + 1$	$2 + 0$	$2 + 1$
p	$0,4 \cdot 0,4$	$0,4 \cdot 0,6$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,6$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,6$

После вычислений и объединения одинаковых значений получаем таблицу:

Y_3	–1	0	1	2	3
p	0,16	0,24	0,12	0,30	0,18

Проверим правильность составления закона распределения:

$$\sum_{i=1}^{5} \mathrm{p}_i = 0{,}16 + 0{,}24 + 0{,}12 + 0{,}30 + 0{,}18 = 1.$$

4) Находим закон распределения случайной величины Y_4:

Y_4	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$	$2 \cdot 0$	$2 \cdot 1$
p	$0{,}4 \cdot 0{,}4$	$0{,}4 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$

После вычислений и объединения одинаковых значений получаем таблицу:

Y_4	–1	0	1	2
p	0,24	0,40	0,18	0,18

Проверим правильность составленного закона распределения:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}24 + 0{,}40 + 0{,}18 + 0{,}18 = 1.$$

5) Находим закон распределения случайной величины $Y_5 = 2X - 4Z$.

Для этого вначале найдем законы распределения случайных величин $2X$ и $4Z$:

$2X$	–2	2	4
p	0,4	0,3	0,3

$4Z$	0	4
p	0,4	0,6

Находим закон распределения случайной величины Y_5:

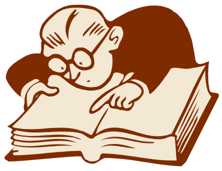
Y_5	$-2 - 0$	$-2 - 4$	$2 - 0$	$2 - 4$	$4 - 0$	$4 - 4$
p	$0{,}4 \cdot 0{,}4$	$0{,}4 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$

После объединения одинаковых значений и упорядочения по возрастанию значений Y_5 получаем:

Y_5	–6	–2	0	2	4
p	0,24	0,34	0,18	0,12	0,12

Проверим правильность составленного закона распределения:

$$\sum_{i=1}^{5} \mathrm{p}_i = 0{,}24 + 0{,}34 + 0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}12 = 1.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

193. Задан закон распределения случайной величины X:

X	–2	–1	0	2
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти законы распределения случайных величин $Y_1 = 3X$, $Y_2 = -4X$, $Y_3 = X^2$, $Y_4 = X^3$.

194. Задан закон распределения случайной величины X:

X	–1	0	1	2
p	0,3	0,2	0,3	0,2

Найти законы распределения случайных величин $Y_1 = -3X$, $Y_2 = 5X$, $Y_3 = 2X^2$, $Y_4 = X^3$.

195. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	–2	1
p	0,4	0,6

Z	–1	0	2
p	0,2	0,3	0,5

Найти законы распределения случайных величин $Y_1 = X + Z$ и $Y_2 = X \cdot Z$.

196. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	–3	0	1
p	0,3	0,5	0,2

Z	–1	3
p	0,7	0,3

Найти законы распределения случайных величин $Y_1 = X + Z$ и $Y_2 = X \cdot Z$.

197. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	–1	0
p	0,4	0,6

Z	1	2
p	0,3	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X + 3Z$

198. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	0	2
p	0,8	0,2

Z	–2	1
p	0,5	0,5

Найти закон распределения случайной величины $Y = 3X - 2Z$.

199. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	1	2
p	0,5	0,5

Z	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X^2 + Z^2$.

200. Заданы законы распределения независимых случайных величин X и Z:

X	–2	1	2
p	0,3	0,4	0,3

Z	–1	0
p	0,6	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2 - 3Z^2$.

1.11. *Числовые характеристики дискретной случайной величины*

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие вероятности, т. е.: $\mathrm{M}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

Свойства:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $\mathrm{M}(c) = c$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $\mathrm{M}(c \cdot X) = c \cdot \mathrm{M}(X)$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$\mathrm{M}(X + Y) = \mathrm{M}(X) + \mathrm{M}(Y).$$

Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности математических ожиданий слагаемых:

$$\mathrm{M}(X - Y) = \mathrm{M}(X) - \mathrm{M}(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}(X \cdot Y) = \mathrm{M}(X) \cdot \mathrm{M}(Y).$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2$.

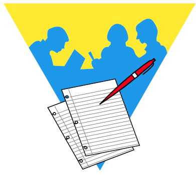
Используя определение математического ожидания, для дискретной случайной величины получаем другое представление:

$$\mathrm{D}(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-\mathrm{M}(X)]^2\,p_i\,.$$

Свойства:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $\mathrm{D}(c)=0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии в квадрате: $\mathrm{D}(c\cdot X)=c^2\cdot\mathrm{D}(X)$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)$.
4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $\mathrm{D}(X-Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)$.
5. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой случайной величины без квадрата ее математического ожидания: $\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-[\mathrm{M}(X)]^2$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}$.



ПРИМЕРЫ

201. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	-2	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Р Е Ш Е Н И Е.

Вычислим математическое ожидание по формуле:

$$\mathrm{M}(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot \mathrm{p}_i=-2\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5=0{,}1.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся свойством:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-[\mathrm{M}(X)]^2.$$

Вычисляем:

$$\mathrm{M}(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot p_i=(-2)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}5=4\cdot 0{,}2+0{,}5=1{,}3.$$

Тогда: $\mathrm{D}(X)=1{,}3-(0{,}1)^2=1{,}3-0{,}01=1{,}29$.

Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}$.

В данном случае: $\sigma(X)=\sqrt{1{,}29}=1{,}136$.

Ответ: $\mathrm{M}(X)=0{,}1$; $\mathrm{D}(X)=1{,}29$; $\sigma(X)=1{,}136$.

202. Дан закон распределения случайной величины X:

X	1	2	4
p	0,2	a	b

Найти a и b, если $\mathrm{M}(X) = 2{,}8$.

РЕШЕНИЕ.

По определению $\mathrm{M}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. В данном случае $\mathrm{M}(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot a + 4 \cdot b = 2{,}8$, т. е.: $2a + 4b = 2{,}6$ или $a + 2b = 1{,}3$.

Получили уравнение, связывающее неизвестное a и b. Второе уравнение получаем, используя свойство $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

В данном случае $0{,}2 + a + b = 1$, т. е.: $a + b = 0{,}8$.

Объединяем полученные уравнения в систему: $\begin{cases} a+2b=1{,}3 \\ a+\ \ b=0{,}8 \end{cases}$.

Решая систему, получаем: $a = 0{,}3$; $b = 0{,}5$.

203. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8; для второго стрелка – 0,7. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий первого стрелка; Z – число попаданий второго стрелка.

Найти закон распределения случайной величины $Y = X - Z$. Вычислить $\mathrm{M}(Y)$, $\mathrm{D}(Y)$.

РЕШЕНИЕ.

Случайная величина X может принимать два значения: 0 (попадания в мишень нет) и 1 (есть попадание в мишень). По условию задачи вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8. Следовательно, вероятность промаха равна 0,2. Таким образом, случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	0	1
p	0,2	0,8

Аналогично случайная величина Z может принимать два значения 0 и 1 с вероятностями 0,3 и 0,7. Случайная величина Z имеет следующий закон распределения:

Z	0	1
p	0,3	0,7

Находим закон распределения случайной величины $Y = X - Z$:

Y	$0 - 0$	$0 - 1$	$1 - 0$	$1 - 1$
p	$0{,}2 \cdot 0{,}3$	$0{,}2 \cdot 0{,}7$	$0{,}8 \cdot 0{,}3$	$0{,}8 \cdot 0{,}7$

После вычислений и объединения одинаковых значений получаем:

Y	–1	0	1
p	0,14	0,62	0,24

Контроль вычислений: $\sum_{i=1}^{3} \mathrm{p}_i = 0{,}14 + 0{,}62 + 0{,}24 = 1.$

Математическое ожидание M(Y) и дисперсию D(Y) можно вычислять двумя способами:

1) зная закон распределения случайной величины Y, вычисляем M(Y) по формуле: $M(Y) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathrm{p}_i$.

В данном случае: $\mathrm{M}(Y) = -1 \cdot 0{,}14 + 0 \cdot 0{,}62 + 1 \cdot 0{,}24 = 0{,}1$.

Для вычисления дисперсии D(Y) вычисляем $\mathrm{M}(Y^2)$:

$$\mathrm{M}(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}14 + 0^2 \cdot 0{,}62 + 1^2 \cdot 0{,}24 = 0{,}38.$$

$$\mathrm{D}(Y) = \mathrm{M}(Y^2) - [\mathrm{M}(Y)]^2 = 0{,}38 - (0{,}1)^2 = 0{,}37;$$

2) рассматриваем случайную величину $Y = X - Z$, где X и Z независимые случайные величины. Вычисляем M(X), D(X), M(Z), D(Z):

$$\mathrm{M}(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}8;$$

$$\mathrm{M}(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8;$$

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}(X^2) - [\mathrm{M}(X)]^2 = 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}16;$$

$$\mathrm{M}(Z) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$

$$\mathrm{M}(Z^2) = 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$

$$\mathrm{D}(Z) = \mathrm{M}(Z^2) - [\mathrm{M}(Z)]^2 = 0{,}7 - 0{,}49 = 0{,}21.$$

По свойствам математического ожидания и дисперсии имеем:

$$\mathrm{M}(Y) = \mathrm{M}(X - Z) = \mathrm{M}(X) - \mathrm{M}(Z) = 0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1;$$

$$\mathrm{D}(Y) = \mathrm{D}(X - Z) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Z) = 0{,}16 + 0{,}21 = 0{,}37.$$

204. Математическое ожидание случайной величины X равно 1, дисперсия равна 5. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайных величин:

а) $X + 3$; б) $6X$; в) $4X + 1$.

РЕШЕНИЕ.

а) При вычислении используем свойства математического ожидания и дисперсии: $\text{M}(X + Z) = \text{M}(X) + \text{M}(Z)$; $\text{M}(C) = C$; $\text{D}(X + Z) = \text{D}(X) + \text{D}(Z)$ для независимых слагаемых: $\text{D}(C) = 0$. Тогда:

$$\text{M}(X + 3) = \text{M}(X) + \text{M}(3) = 1 + 3 = 4;$$

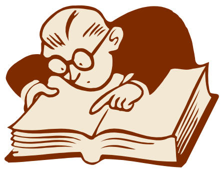
$$\text{D}(X + 3) = \text{D}(X) + \text{D}(3) = 5 + 0 = 5.$$

б) Используем свойства: $\text{M}(c \cdot X) = c \cdot \text{M}(X)$; $\text{D}(c \cdot X) = c^2 \cdot \text{D}(X)$. Получаем: $\text{M}(6 \cdot X) = 6 \cdot \text{M}(X) = 6$; $\text{D}(6 \cdot X) = 6^2 \cdot \text{D}(X) = 36 \cdot 5 = 210$.

в) Используя перечисленные выше свойства, получаем:

$$\text{M}(4X + 1) = \text{M}(4X) + \text{M}(1) = 4\text{M}(X) + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5;$$

$$\text{D}(4\text{X} + 1) = \text{D}(4\text{X}) + \text{D}(1) = 4^2 \cdot \text{D}(\text{X}) = 16 \cdot 5 = 80.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

205. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–3	–1	1
p	0,4	0,3	0,3

206. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–2	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

207. Найти параметр a, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

X	0	1	3	4
p	0,1	0,3	a	0,4

208. Найти параметр c, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

X	0	0,5	1	2
p	0,3	c	0,2	0,3

209. Дан закон распределения случайной величины X:

X	–2	–1	1
p	a	0,4	b

Найти a и b, если $M(X) = -0{,}7$.

210. Дан закон распределения случайной величины X:

X	–1	0	1	2
p	0,3	a	0,2	b

Найти a и b, если $M(X) = 0{,}5$.

211. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют 800 ден. ед., а число продаж X автомобилей в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,5	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02

Найти среднюю ежедневную прибыль салона, если продажа одного автомобиля приносит прибыль 2000 ден. ед.

212. Дима предложил Алеше игру по следующим правилам: «Возьми из колоды карт наугад 1 карту и отложи в сторону. После этого возьми наугад из колоды еще одну карту. Если у взятых тобой карт совпадут масти, то я даю тебе 2 гривны, если совпадет старшинство – 3 гривны. В противном случае ты даешь мне 1 гривну». Стоит ли Алеше соглашаться на эти условия игры? Рассмотреть случаи, когда колода содержит:

а) 36 карт;
б) 52 карты.

213. Инвестор имеет 10 000 долларов для покупки акций либо химической компании, либо пивоваренной. Его брокер привел ему следующие данные о вероятной отдаче денег в последующие 12 месяцев:

Вероятная годовая прибыль	–2000	–1000	0	1000	2000	3000	4000
Химическая компания	0,05	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,05
Пивоваренная компания	0,03	0,05	0,2	0,3	0,2	0,2	0,02

Какое вложение денег более прибыльное? Какое вложение денег менее рискованное?

214. Рассматриваются две операции, прибыль от которых являются случайными величинами X и Y;

X	–5	0	5	10
p	0,1	0,2	0,5	0,2

Y	–5	0	5	10
p	0,2	0,2	0,2	0,4

Какая из операций более прибыльная? Какая из операций менее рискованная?

215. В XIX веке на североамериканском Дальнем Западе играли в игру «Попытай счастья». Бармен предлагал скучающему посетителю поставить доллар и назвать одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. «Теперь ты бросаешь три игральные кости, – продолжал он. – Если на одной из них выпадет названное тобой число, то забирай свой доллар и еще один мой в придачу. Если это число выпадет на двух костях, то я к твоему доллару доплачу еще два. А если на всех трех, то я даю три доллара». Кому выгодна эта игра?

216. Банк выдал кредит 100 тыс. ден. ед. на год под залог жилого дома под 8% годовых (сам дом был оценен именно в 100 тыс. ден. ед.). Для уменьшения риска банк приобрел страховой полис на 100 тыс. ден. ед. на этот дом, заплатив 3% от страховой суммы. В страховой компании вероятность сгореть дому такого типа за год оценивают в 0,01 (в этом случае заемщик не вернет банку ничего). Найти средний доход банка.

217. Команда состоит из двух стрелков. Число очков, выбиваемых каждым из них при одном выстреле, является случайными величинами X и Z, которые задаются следующими законами распределения:

X	3	4	5
p	0,3	0,4	0,3

Z	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Результаты стрельбы одного стрелка не влияют на исход стрельбы второго. Составить закон распределения случайной величины Y – числа очков, выбиваемых командой, если стрелки сделают по одному выстрелу. Вычислить M(Y), D(Y).

218. Известно, что M(X) = 3; D(X) = 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:

а) $X – 2$; б) $5X$; в) $3 – 6X$.

219. Известно, что M(X) = –1; D(X) = 2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин:

а) $X + 4$; б) $2X$; в) $7 + 3X$.

1.12. *Основные законы распределения дискретной случайной величины*

Биномиальный закон распределения

Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A. Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и не зависит от результатов других испытаний. Пусть эта вероятность равна р.

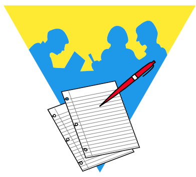
Рассмотрим случайную величину X – число появлений события A в серии из n испытаний. Очевидно, что X может принимать все целые значения от нуля до n. Вероятности этих возможных значений можно вычислить по формуле Бернулли: $\mathrm{P}_n(k) = C_n^k \cdot \mathrm{p}^k \cdot q^{n-k}$.

Таким образом, закон распределения случайной величины X задается таблицей:

X	0	1	2	…	k	…	n
р	q^n	$C_n^1 \mathrm{p} \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \mathrm{p}^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^k \mathrm{p}^k \cdot q^{n-k}$	…	p^n

Полученный закон называется ***биномиальным***.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по следующим формулам: $\mathrm{M}(X) = n \cdot \mathrm{p}$; $\mathrm{D}(X) = n \cdot \mathrm{p} \cdot q$.



ПРИМЕРЫ

220. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трех опытах. Построить закон распределения случайной величины X. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Р Е Ш Е Н И Е.

Случайная величина X может принимать 4 значения: 0, 1, 2, 3. Так как опыты независимы и в каждом опыте событие A появляется с одной и той же вероятностью р = 0,4, то случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения. Вычисляем вероятности каждого из возможных значений случайной величины по формуле Бернулли. В данном случае: $n = 3$; $q = 1 - \mathrm{p} = 0{,}6$.

$$\mathrm{P}(X = 0) = q^3 = (0{,}6)^3 = 0{,}216.$$

$$P(X=1)=C_3^1\cdot p^1\cdot q^2=3\cdot 0{,}4\cdot(0{,}6)^2=0{,}432.$$

$$P(X=2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=3\cdot(0{,}4)^2\cdot 0{,}6=0{,}288.$$

$$P(X=3)=p^3=(0{,}4)^3=0{,}064.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины задается таблицей:

X	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X можно вычислить двумя способами:

1. Вычисляем математическое ожидание, используя определение:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}216+1\cdot 0{,}432+2\cdot 0{,}288+3\cdot 0{,}064=1{,}2.$$

Дисперсию вычисляем, используя свойство:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}216+1^2\cdot 0{,}432+2^2\cdot 0{,}288+3^2\cdot 0{,}064=2{,}16.$

$D(X)=2{,}16-(1{,}2)^2=2{,}16-1{,}44=0{,}72.$

2. Математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, вычисляем по формулам:

$M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}4=1{,}2;\qquad D(X)=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}72.$

Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}72}=0{,}85.$$

Ответ: $M(X)=1{,}2$; $D(X)=0{,}72$; $\sigma(X)=0{,}85$.

221. Производится 100 независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Случайная величина X – число появлений события A. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

РЕШЕНИЕ.

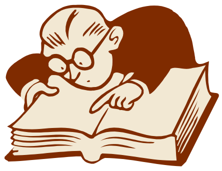
Случайная величина X подчиняется биномиальному закону распределения. Так как случайная величина X принимает 101 значение, вычисление $M(X)$ и $D(X)$ с использованием определения математического ожидания и дисперсии на практике выполнить трудно.

Вычисляем $M(X)$ и $D(X)$, используя формулы:

$$M(X)=n\cdot p;\qquad D(X)=n\cdot p\cdot q.$$

Получаем: $M(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40$; $D(X) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 24$; $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{24} = 4{,}9$.

Ответ: $M(X) = 40$; $D(X) = 24$; $\sigma(X) = 4{,}9$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

222. В магазин вошли 4 покупателя. Вероятность совершить покупку для каждого покупателя одна и та же и равна 0,3. Случайная величина X – число покупателей, совершивших покупку. Построить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$.

223. Вероятность подписания соглашения в результате деловых переговоров равна 0,7. Случайная величина X – число подписанных соглашений после 3 деловых встреч. Найти закон распределения случайной величины X, $M(X)$, $\sigma(X)$.

224. Вероятность приема на работу каждого из 5 претендентов равна 0,3. Случайная величина X – число претендентов, принятых на работу. Найти закон распределения случайной величины X, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

225. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования. Найти среднее число невозвращаемых кредитов.

226. Производится 60 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Случайная величина X – число попаданий. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

227. Монета подбрасывается 30 раз. Случайная величина X – число выпавших гербов. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

228. Банк выдал ссуды 1000 разным заемщикам в размере 10 000 ден. ед. каждому под ставку ссудного процента $r = 30\%$. Найти ожидаемую прибыль банка, если вероятность возврата ссуды каждым заемщиком равна 0,9.

229. Компания рассматривает проект строительства четырех домов в разных местах. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки дома оцениваются в 0,8 (собственно, речь идет об агитации будущих жильцов). Каждый построенный дом окупает $\frac{1}{3}$ всех затрат компании по проекту. Найти ожидаемую прибыль компании.

Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если ее возможные значения равны 0; 1; 2; …; k …, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле:

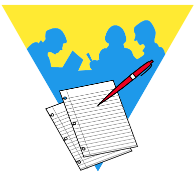
$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Характерной особенностью распределения Пуассона является совпадение математического ожидания и дисперсии, причем:

$$\mathrm{M}(X) = \mathrm{D}(X) = \lambda$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального распределения, если число испытаний n велико, а вероятность р появления события в каждом испытании очень мала (в этом случае $\lambda = n\mathrm{p}$). Значения вероятностей $\mathrm{P}(X = k) = F(k,\ \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ приведены в прил. 1.

Типичными примерами случайной величины, имеющей распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за некоторое время t; число отказов сложной аппаратуры за время t, если известно, что отказы независимы друг от друга и в среднем на единицу времени приходится λ отказов и т. д.



ПРИМЕРЫ

230. На телефонную станцию в течение определенного часа дня поступает в среднем 30 вызовов. Найти вероятность того, что в течение минуты поступает не более двух вызовов.

РЕШЕНИЕ.

Математическое ожидание числа вызовов за минуту равно: $\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

Вероятность того, что в течение данной минуты возникнет не более двух вызовов, равна сумме вероятностей того, что в течение данной минуты будет либо 0, либо 1, либо 2 вызова. Поэтому искомая вероятность:

$$\mathrm{P}(X \le 2) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) = F(0;\ 0{,}5) + F(1;\ 0{,}5) + F(2;\ 0{,}5) =$$
$$= 0{,}6065 + 0{,}3033 + 0{,}0758 = 0{,}9856.$$

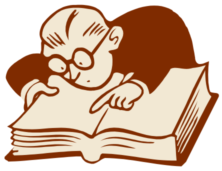
Ответ: 0,9856.

231. Случайная величина X имеет распределение Пуассона. Найти $P(X = 2)$, если: $2M(X) + 3D(X) = 15$.

РЕШЕНИЕ.

Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, $M(X) = D(X) = \lambda$. По условию $2M(X) + 3D(X) = 15$. Подставляя $M(X) = D(X) = \lambda$, получаем $5\lambda = 15$, т. е. $\lambda = 3$. Требуемую вероятность $P(X = 2)$ находим по таблице (см. прил. 1) при $\lambda = 3$, $k = 2$.

$P(X = 2) = 0{,}2240$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

232. Известно, что число грузовиков, прибывающих на склад под разгрузку в течение часа, подчиняется закону Пуассона, и их среднее число равно 3. Найти вероятность того, что в течение часа под разгрузку придет более 4 машин.

233. Найти среднее число бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы 1 бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий распределено по закону Пуассона.

234. В среднем за месяц бухгалтерия компании использует 4 коробки дискет. Предполагая, что потребность в дискетах подчиняется распределению Пуассона, найти минимальное число коробок дискет, которые бухгалтерия должна заказывать к началу очередного месяца, такое, чтобы вероятность перерасхода не превышала 4%.

235. Страховая компания за страховку строения от пожара берет плату, равную 1,5% от суммы, на которую оно застраховано. Было застраховано 1000 дачных домиков на 4000 ден. ед. каждый. Вероятность сгореть в течение года для каждой дачи оценивается в 0,01. Найти: 1) ожидаемую прибыль страховой компании; 2) вероятность получить прибыль в 2 раза больше ожидаемой; 3) вероятность получить прибыль в 3 раза меньше ожидаемой; 4) вероятность понести убытки.

236. Среди 100-долларовых купюр 1% фальшивых, сделанных, однако, довольно искусно, так что работница обменного пункта десятую часть их принимает за настоящие. В день принимается примерно 200 100-долларовых купюр. а) Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы одна фальшивая? б) За сколько дней работы оправдает себя определитель фальшивых купюр, стоящий 90 дол. (он определяет все фальшивые купюры)?

237. Компания имеет оборудование для производства болтов. В течение часа из строя выходят в среднем 2 станка. Для устранения неполадок на заводе работает специальный инженер. Однако ему приходится вызывать ассистента, если происходит более двух поломок в час. Как часто в среднем потребуется помощь ассистента в течение 40 часов рабочей недели?

238. Случайная величина X имеет распределение Пуассона. Найти $\mathrm{P}(X = 3)$, если: $3\mathrm{M}(X) + 2\mathrm{D}(X) = 10$.

239. Случайная величина X имеет распределение Пуассона. Найти $\mathrm{P}(X = 4)$, если: $4\mathrm{M}(X) - \mathrm{D}(X) = 3$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Определить, будут ли дискретными следующие случайные величины:
   а) число выбитых очков при стрельбе по мишени;
   б) расстояние от точки попадания пули до центра мишени;
   в) количество покупателей, совершивших покупку в данном магазине в течение дня.
2. Что характеризует математическое ожидание?
3. Что характеризует дисперсия случайной величины?
4. Что больше: квадрат среднего значения случайной величины или среднее значение квадрата случайной величины?
5. Известно, что среднее значение случайной величины равно 1, а дисперсия равна 2. Может ли эта случайная величина иметь распределение Пуассона?
6. Почему закон Пуассона называют законом массовых редких явлений?
7. Может ли для какой-нибудь случайной величины X выполняться условия:
   а) $\mathrm{M}(X) = -2$; б) $\mathrm{D}(X) = -1$; в) $\sigma(X) = 0$; г) $\mathrm{M}(X) = \sigma(X)$;
   д) $\mathrm{D}(X) = \sigma(X)$; е) $\sigma(X) > \mathrm{D}(X)$; ж) $\mathrm{M}(X^2) = -5$?

1.13. *Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Плотность распределения*

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна на всей числовой оси и дифференцируема везде, за исключением, быть может, конечного числа точек. Возможные значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Для непрерывной случайной величины X, так же как и для дискретной случайной величины, определяется ***функция распределения*** $F(x)$:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$ при всех значениях x.

2. Если $b > a$, то $F(b) \ge F(a)$.

3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$,

где $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, равное данному фиксированному числу, равна нулю, т. е.: $\mathrm{P}(X = x_0) = 0$.

5. Вероятность попадания на интервал определяется формулой: $\mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется первая производная от функции распределения, т. е.: $f(x) = F'(x)$.

Функцию распределения $F(x)$ называют ***интегральной функцией*** распределения, плотность распределения $f(x)$ – ***дифференциальной функцией*** распределения.

График функции $f(x)$ называется ***кривой распределения***.

Свойства плотности распределения:

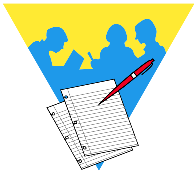
1. Плотность распределения неотрицательна, т. е.: $f(x) \ge 0$ при всех x.

2. Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения $f(x)$ формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

3. Вероятность попадания случайной величины X на интервал (a, b) определяется формулой: $\mathrm{P}(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то это свойство запишется в виде: $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$.



ПРИМЕРЫ

240. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ a(x-1)^2 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) плотность распределения $f(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал [1,5; 2,5].

Р Е Ш Е Н И Е.

1) Функция распределения непрерывной случайной величины должна быть функцией непрерывной. Выбираем параметр a так, чтобы в точках $x = 1$ и $x = 2$ функция $F(x)$ была непрерывной (во всех остальных точках числовой оси $F(x)$ непрерывна). Функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Рассмотрим точку $x = 1$. Условие непрерывности функции в точке $x = 1$ дает равенство: $a \cdot (1 - 1)^2 = 0$, что выполняется при всех a. Рассмотрим точку $x = 2$. Условие непрерывности функции $F(x)$ в точке $x = 2$ дает равенство: $a \cdot (2 - 1)^2 = 1$. Отсюда получаем, $a = 1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ (x-1)^2 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

2) Плотность распределения $f(x)$ равна производной от функции распределения, т. е.: $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 2(x-1) & \text{при} \quad 1 < x < 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Заметим, что при $x = 2$ производная $F'(x)$ не существует.

3) Вероятность попадания случайной величины на интервал [1,5; 2,5] находим, используя свойство функции распределения:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

В данном случае, $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$.

$\mathrm{P}(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = 1 - (1{,}5 - 1)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Ответ: 1) $a = 1$; 2) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{при} \quad x \in (1;\, 2), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (1;\, 2). \end{cases}$

3) $\mathrm{P}(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = 0{,}75.$

241. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значения из интервала (0,25; 0,75).

РЕШЕНИЕ.

Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (0,25; 0,75) при одном испытании. По свойству функции распределения $\mathrm{P} = \mathrm{P}(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = (0{,}75)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}5$.

Вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение из интервала (0,25; 0,75), находим по формуле Бернулли:

$$\mathrm{P}_4(3) = C_4^3 \mathrm{p}^3 q = 4 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

242. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ ax^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал (–0,5; 0,5).

Р Е Ш Е Н И Е.

1) Плотность распределения $f(x)$ должна удовлетворять условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. В данном случае все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (0; 1], поэтому это свойство запишется в виде $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx = 1$, т. е.: $\int\limits_{0}^{1} ax^2 dx = 1$. Вычисляем интеграл:

$$\int\limits_{0}^{1} ax^2 dx = a \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = a \cdot \left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = 1, \text{ откуда: } \frac{a}{3} = 1, \text{ т. е.: } a = 3.$$

Таким образом, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

2) Для нахождения функции распределения $F(x)$ воспользуемся формулой: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Функция $f(x)$ задается тремя выражениями на трех интервалах. Рассмотрим поочередно эти интервалы.

Пусть $x \le 0$. Тогда: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$.

Пусть $0 < x \le 1$. Тогда: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int\limits_{0}^{x} 3x^2\, dx = 0 + 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x = x^3.$$

Пусть $x > 1$. Тогда: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{x} f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} 3x^2\, dx + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dx = 0 + 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + 0 = 1.$$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

3) Вероятность попадания случайной величины X на интервал (–0,5; 0,5) можно вычислить двумя способами:

I. Воспользуемся свойством функции распределения:

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$. В данном случае получаем:

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = (0{,}5)^3 - 0 = 0{,}125.$$

II. Воспользуемся свойством плотности распределения:

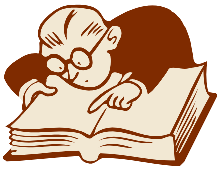
$P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. В данном случае получаем:

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)dx = \int\limits_{-0{,}5}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{0{,}5} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-0{,}5}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{0{,}5} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0{,}5} = 0{,}125.$$

Ответ: 1) $a = 3$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

3) $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = 0{,}125$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

243. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ a(x-2)^2 & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал (1, 3].

244. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ k\,x & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр k; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал [1, 4).

245. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1, \\ k(x+1) & \text{при} \quad -1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр k; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал [0, 1].

246. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ a(1-\cos 2x) & \text{при} \quad 0\le x\le \pi/2, \\ 1 & \text{при} \quad x>\pi/2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал $(\frac{\pi}{4}, \pi)$.

247. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ (ax+b) & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

Найти: 1) параметры a и b; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал [0,5; 1,5).

248. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ (ax^2+b) & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

Найти: 1) параметры a и b; 2) плотность распределения $f(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал (0,5; 4).

249. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ (x-1) & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате пяти независимых испытаний величина X ровно два раза примет значение из интервала [1,5; 2,5].

250. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ (x+1)^2 & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате трех независимых испытаний величина X ровно два раза примет значение из интервала (–0,5; 1).

251. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на интервал $(0;\ \frac{\pi}{4})$.

252. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ a\cdot\cos x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на интервал $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

253. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ a\cdot\sin x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

254. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ x+a & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на интервал (1,5; 2,5).

255. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ ax & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал (0; 1,5).

256. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x)=a\cdot e^{-|x|}$ $(-\infty < x < \infty)$.

Найти: 1) параметр a; 2) функцию распределения $F(x)$;
3) вероятность попадания случайной величины на интервал (–1; 0).

1.14. *Числовые характеристики непрерывной случайной величины*

Математическое ожидание непрерывной случайной величины, заданной на интервале (–∞, ∞), вычисляется по формуле:

$$\mathrm{M}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx.$$

Если же все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то: $\mathrm{M}(X)=\int_{a}^{b} x\cdot f(x)\,dx.$

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}(X))^2$.

Если случайная величина задана на интервале (–∞, ∞), то:

$$\mathrm{D}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} [x-\mathrm{M}(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Если же возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то: $\mathrm{D}(X)=\int_{a}^{b} [x-\mathrm{M}(X)]^2 f(x)\,dx.$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной: $\mathrm{M}(c) = c$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $\mathrm{M}(c \cdot X) = c \cdot \mathrm{M}(X)$.

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых:

$$\mathrm{M}(X + Y) = \mathrm{M}(X) + \mathrm{M}(Y), \qquad \mathrm{M}(X - Y) = \mathrm{M}(X) - \mathrm{M}(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}(X \cdot Y) = \mathrm{M}(X) \cdot \mathrm{M}(Y).$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $\mathrm{D}(c) = 0$.

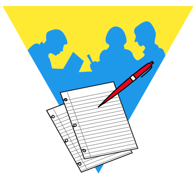
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии в квадрате: $\mathrm{D}(c \cdot X) = c^2 \cdot \mathrm{D}(X)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $\mathrm{D}(X - Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$.

5. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой случайной величины без квадрата ее математического ожидания: $\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}(X^2) - [\mathrm{M}(X)]^2$.

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{D}(X)}$.



ПРИМЕР

257. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

Р Е Ш Е Н И Е.

Все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (0, 2], поэтому для вычисления математического ожидания используем формулу: $\mathrm{M}(X)=\int\limits_a^b x\cdot f(x)\,dx$. В данном случае:

$$\mathrm{M}(X)=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Для вычисления дисперсии вычисляем $\mathrm{M}(X^2)$:

$$\mathrm{M}(X^2)=\int\limits_a^b x^2\cdot f(x)\,dx=\int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=2.$$

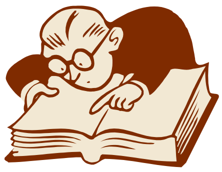
Дисперсию вычисляем по формуле из свойства 5 для дисперсии:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-(\mathrm{M}(X))^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}47.$$

Ответ: $\mathrm{M}(X)=\frac{4}{3}$, $\mathrm{D}(X)=\frac{2}{9}$, $\sigma(X)=0{,}47$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

258. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2x & \text{при} \quad 0<x<1,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$

259. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \sin x & \text{при} \quad 0\le x\le \pi/2,\\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$

260. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \cos x & \text{при} \quad 0\le x\le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi/2. \end{cases}$

261. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 3x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

262. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1, \\ \dfrac{1}{4}x & \text{при} \quad 1\le x\le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

263. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1, \\ x-1 & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

264. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1) & \text{при} \quad 1\le x\le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

265. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной своей функцией распределения: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

1.15. *Основные законы распределения непрерывной случайной величины*

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (a, b), если ее плотность распределения на этом интервале постоянна, а вне его равна нулю:

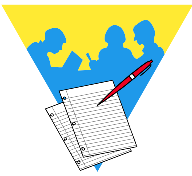
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b, \\ 0 & \text{при} \quad x\ge b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей равномерное распределение, равны:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}; \qquad \mathrm{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Функция распределения $F(x)$ имеет вид: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a<x<b, \\ 1 & \text{при} \quad x\ge b. \end{cases}$

Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал (α, β) равна: $\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, $((\alpha, \beta) \in (a, b))$.



ПРИМЕРЫ

266. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (1; 7). Написать выражение ее плотности распределения $f(x)$, найти математическое ожидание и дисперсию.

РЕШЕНИЕ.

Для случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (1; 7), плотность распределения равна:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ \dfrac{1}{6} & \text{при} \quad 1<x<7, \\ 0 & \text{при} \quad x\ge 7. \end{cases}$$

Находим математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{1+7}{2}=4; \qquad \mathrm{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(7-1)^2}{12}=\frac{6^2}{12}=3.$$

Ответ: M(*X*) = 4; D(*X*) = 3.

267. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение, причем M(*X*) = 3 и D(*X*) = $4/3$. Найти плотность распределения *f*(*x*).

РЕШЕНИЕ.

Воспользуемся формулами: $\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

Подставляя M(*X*) = 3 и D(*X*) = $4/3$, получаем для нахождения *a* и *b* систему уравнений: $\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=3,\\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

Преобразуем полученную систему: $\begin{cases}a+b=6,\\ (b-a)^2=16\end{cases}$ или $\begin{cases}a+b=6,\\ b-a=4.\end{cases}$

Решая систему, получаем: *a* = 1, *b* = 5.

Плотность распределения равномерно распределенной случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le a,\\ \dfrac{1}{(b-a)} & \text{при} \quad a<x<b,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge b.\end{cases}$$

В данном случае:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 1<x<5,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 5.\end{cases}$$

268. Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на интервале (2; 6). Найти вероятность попадания на интервал:

1) (3; 5); 2) (5; 7).

Р Е Ш Е Н И Е.

Так как случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (2; 6), ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 2<x<6,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 6.\end{cases}$$

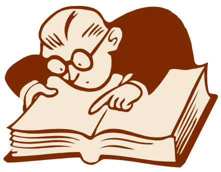
Вероятность попадания случайной величины X на интервал (α, β) вычисляем по формуле:

$$\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

В данном случае имеем:

$$\mathrm{P}(3<X<5)=\int_{3}^{5} f(x)\,dx=\int_{3}^{5}\tfrac{1}{4}dx=\tfrac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(5<X<7)=\int_{5}^{7} f(x)\,dx=\int_{5}^{6}\tfrac{1}{4}dx+\int_{6}^{7}0dx=\tfrac{1}{4}.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

269. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (–2; 6). Написать выражение ее плотности распределения. Найти M(X) и D(X).

270. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (0; 4). Написать выражение ее плотности распределения. Найти: M(X), D(X).

271. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (–l; l). Написать выражение ее плотности распределения. Найти M(X) и D(X).

272. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (a – l; a + l). Написать выражение ее плотности распределения. Найти M(X) и D(X).

273. Случайная величина X имеет равномерное распределение, причем M(X) = 2, D(X) = 3. Найти плотность распределения f(x).

274. Случайная величина X имеет равномерное распределение, причем $M(X) = 1$, $D(X) = \frac{1}{3}$. Найти плотность распределения $f(x)$.

275. Случайная величина X имеет равномерное распределение, причем $M(X) = 1$, $D(X) = 3$. Найти плотность распределения $f(x)$.

276. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (2; 5). Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания на интервал (3; 4).

277. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (–2; 6). Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания на интервал (0; 13).

278. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (0; 4). Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания на интервал (1; 3).

279. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале (3; 7). Найти вероятность попадания на интервал (2; 6).

280. Предполагая, что индекс цен на продовольственные товары равномерно распределен в пределах от 110 до 150%, найти вероятность того, что он не превысит 135%, а также вычислить характеристики его разброса.

281. Коммерческая маржа X посреднической фирмы распределена равномерно, причем $M(X) = 20$ тыс. ден. ед. в месяц и $\sigma(X) = 3{,}464$ тыс. ден. ед. в месяц. Найти вероятность того, что в следующем месяце она превысит 25 тыс. ден. ед.

Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{при} \quad x \ge 0, \end{cases}$$

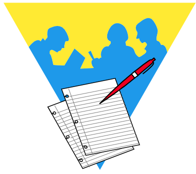
где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функция распределения $F(x)$ имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей показательное распределение, соответственно равны:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность попадания случайной величины X на заданный интервал (α, β) равна: $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$, $\alpha \geq 0$.



ПРИМЕРЫ

282. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию.

РЕШЕНИЕ.

Сравнивая заданную плотность распределения $f(x)$ с плотностью распределения случайной величины, имеющей показательное распределение, заключаем, что заданная случайная величина имеет показательное распределение с $\lambda = 2$.

Таким образом, получаем: $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $M(X) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{4}$.

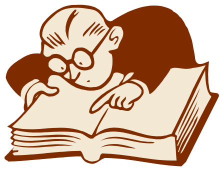
283. Случайная величина X имеет показательное распределение с $M(X) = \frac{1}{3}$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

РЕШЕНИЕ.

1) Математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение, вычисляется по формуле $M(X) = \frac{1}{\lambda}$. По условию задачи $M(X) = \frac{1}{3}$. Отсюда: $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$, т. е.: $\lambda = 3$. Плотность распределения $f(x)$ имеет вид: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 3e^{-3x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$

2) Функция распределения $F(x)$ случайной величины, имеющей показательное распределение, при $\lambda = 3$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-3x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

284. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти: 1) математическое ожидание и дисперсию; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал (0; 1).

285. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью распределения: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0{,}2e^{-0{,}2x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Найти: 1) математическое ожидание и дисперсию; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал (5; 10).

286. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью распределения: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$

Найти: 1) математическое ожидание и дисперсию; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал (2; 4).

287. Случайная величина X имеет показательное распределение с $\mathrm{D}(X) = \frac{1}{4}$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

288. Случайная величина X имеет показательное распределение с $\mathrm{M}(X) = 1$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

289. Случайная величина X имеет показательное распределение с $\sigma(X)=\frac{1}{4}$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

290. Случайная величина X имеет показательное распределение с $D(X) = 4$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

291. Регулярным контролем состояния овощей, завезенных на склад, определяется срок их годности. В среднем он равен 125 дням. Описать этот срок с помощью показательного закона распределения и найти вероятность того, что он превысит средний.

292. Случайная величина X – продолжительность жизни мужчин в некотором регионе – задана функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,02x}$, $x \geq 0$. Найти вероятность того, что случайно выбранный мужчина: 1) доживет до 60 лет; 2) проживет, по крайней мере, на 20 лет больше средней продолжительности жизни.

Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины.

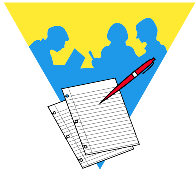
Функция распределения: $$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – ***функция Лапласа***, или интеграл вероятностей. Значения функции $\Phi(x)$ приведены в прил. 3.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$ вычисляется по формуле:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал, симметричный относительно математического ожидания a, вычисляется по формуле: $\mathrm{P}(|X-a| \le \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.



ПРИМЕРЫ

293. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mathrm{M}(X) = 30$ и дисперсией $\mathrm{D}(X) = 100$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 60).

РЕШЕНИЕ.

1) Плотность распределения в данном случае при $a = \mathrm{M}(X) = 30$ и $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}(X)} = \sqrt{100} = 10$ равна:

$$f(x) = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{2 \cdot 10^2}} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}.$$

2) Вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 60) при $a = 30$ и $\sigma = 10$ вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}(10 < X < 60) = \Phi\left(\frac{60-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2).$$

По таблицам (см. прил. 3) находим $\Phi(2)$ и $\Phi(3)$. Получаем:

$$\mathrm{P}(10 < X < 60) = \Phi(3) + \Phi(2) = 0{,}4986 + 0{,}4772 = 0{,}9758.$$

Ответ: 1) $f(x) = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}$; 2) $\mathrm{P}(10 < X < 60) = 0{,}9758$.

294. Нормально распределенная случайная величина имеет плотность распределения: $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

Найти: 1) $\mathrm{M}(X)$ и $\mathrm{D}(X)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

РЕШЕНИЕ.

1) Плотность распределения нормально распределенной величины равна: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Сравнивая это выражение с заданной в условии функцией $f(x)$, получаем: M(X) = a = 3; D(X) = σ^2 = 4.

2) Функция распределения $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\delta}\right)$. Подставляя a = 3 и σ = 2, получаем $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$.

Ответ: 1) M(X) = 3; D(X) = 4; 2) $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$.

295. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a = 3 и средним квадратическим отклонением σ = 4. Найти вероятность того, что X отклоняется от своего математического ожидания по модулю не более, чем на 0,2.

РЕШЕНИЕ.

Требуемую вероятность вычисляем по формуле:

$$\mathrm{P}(|X-a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

В данном случае a = 3, σ = 4, ε = 0,2.

$$\mathrm{P}(|X-3| \le 0{,}2) = 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{4}\right) = 2\Phi(0{,}05).$$

По таблицам (см. прил. 3) находим: Φ(0,05) = 0,0199.

Окончательно получаем:

$$\mathrm{P}(|X-3| \le 0{,}2) = 2 \cdot 0{,}0199 = 0{,}0398.$$

296. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием M(X) = 0. Найти среднее квадратическое отклонение σ, если вероятность попадания случайной величины в интервал [–1, 1] равна 0,7.

РЕШЕНИЕ.

Воспользуемся формулой:

$$\mathrm{P}(|X-a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Подставляя в эту формулу a = 0, ε = 1, получаем:

$$\mathrm{P}(|X| \le 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

По условию задачи: P(–1 ≤ X ≤ 1) = P(|X| ≤ 1) = 0,7.

Отсюда: $2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)=0{,}7$, т. е.: $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)=0{,}35$.

По таблицам (см. прил. 3) находим значение аргумента, при котором функция Лапласа $\Phi(x)$ равна 0,35, т. е.: $x=\dfrac{1}{\sigma}\approx 1{,}04$.

Окончательно получаем: $\sigma\approx\dfrac{1}{1{,}04}=0{,}96$.

297. В нормальном распределении с параметрами $a=3$ и $\sigma=2$ найти значение x такое, чтобы вероятность попасть в интервал [x; 5] была равна 0,5.

РЕШЕНИЕ.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал [x_1; x_2] вычисляется по формуле:

$$P(x_1\le X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Подставляя в эту формулу: $x_1 = x$, $x_2 = 5$, $a = 3$, $\sigma = 2$, получаем:

$$P(x\le X\le 5)=\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

По условию задачи: P(x ≤ X ≤ 5) = 0,5.

По таблицам (см. прил. 3) находим: $\Phi(1)$ = 0,3413.

Подставляя эти значения, получаем:

$$0{,}5=0{,}3413-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Откуда: $\Phi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)=-0{,}1587$. Находим в таблице значение аргумента, при котором функция $\Phi(x)$ равна 0,1587. $\Phi(0{,}41)$ = 0,1591.

Учитывая нечетность функции $\Phi(x)$, получаем $\dfrac{x-3}{2}\approx-0{,}41$. Отсюда: $x\approx 2{,}18$.

298. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 4$ и $\sigma = 3$. Найти вероятность того, что при трех испытаниях эта случайная величина попадет в интервал (1; 7):

1) все три раза; 2) два раза.

Р Е Ш Е Н И Е.

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (1, 7) при одном испытании.

Воспользуемся формулой:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

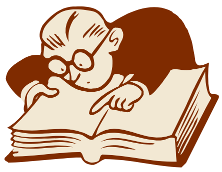
В данном случае:

$$P(1 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-4}{3}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в интервал (1, 7) при одном испытании равна: p = 0,6626. Тогда вероятность того, что попадания в интервал не будет, равна: $q = 1 - p = 0{,}3174$. Для вычисления требуемых вероятностей применим формулу Бернулли:

1) $n = 3$, $k = 3$; $p_3(3) = p^3 = (0{,}6826)^3 = 0{,}318$.

2) $n = 3$, $k = 2$; $p_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0{,}6826)^2 \cdot 0{,}3174 = 0{,}444$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

299. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M(X) = 1$ и дисперсией $D(X) = 16$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал (0; 2).

300. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами: $a = M(X) = 5$, $\sigma(X) = 3$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал (2; 11).

301. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причем: $M(X) = 20$, $D(X) = 25$. Найти: 1) плотность распределения $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал (15; 30).

302. Нормально распределенная случайная величина имеет плотность распределения: $f(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Найти: 1) $M(X)$ и $D(X)$; 2) функцию распределения $F(x)$.

303. Нормально распределенная случайная величина имеет плотность распределения: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$. Найти: 1) M($X$) и D($X$); 2) функцию распределения $F(x)$.

304. Нормально распределенная случайная величина имеет плотность распределения: $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$. Найти: 1) M($X$) и D($X$); 2) функцию распределения $F(x)$.

305. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Найти вероятность того, что X отклоняется от своего математического ожидания по модулю не более, чем на ε. Произвести вычисления для следующих данных:

1) $a = 1$, $\sigma = 2$, $\varepsilon = 0{,}6$;
2) $a = 4$, $\sigma = 3$, $\varepsilon = 1{,}5$;
3) $a = 5$, $\sigma = 8$, $\varepsilon = 1{,}2$.

306. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием M(X) = 2. Найти среднее квадратическое отклонение σ, если вероятность попадания случайной величины в интервал [0; 4] равна 0,5.

307. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием M(X) = 3. Найти среднее квадратическое отклонение σ, если вероятность попадания случайной величины в интервал [2; 4] равна 0,8.

308. В нормальном распределении с параметрами $a = 6$ и $\sigma = 4$ найти значение x такое, чтобы вероятность попасть в интервал [5; x] была равна 0,4.

309. В нормальном распределении с параметрами $a = 4$ и $\sigma = 5$ найти значение x такое, чтобы вероятность попасть в интервал [x; 6] была равна 0,3.

310. В нормальном распределении с параметрами $a = 8$ и $\sigma = 3$ найти значение x такое, чтобы вероятность попасть в интервал [5; x] была равна 0,6.

311. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $a = 6$ и $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что при двух испытаниях эта случайная величина попадет в интервал (5; 8)

1) один раз; 2) два раза.

312. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $a = 5$ и $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что при двух испытаниях эта случайная величина попадет в интервал (3; 6)

1) два раза; 2) один раз; 3) ни разу.

313. Магазин производит продажу мужских костюмов. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 48 и 2. Определить процент спроса на 50-й размер при условии разброса значений этой величины в интервале (49; 51).

314. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40 размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?

315. Упаковочный аппарат расфасовывает стиральный порошок в пакеты, средний вес которых 930 грамм, а среднеквадратическое отклонение – 20 грамм: а) Какая доля пакетов будет иметь вес до 900 грамм? б) Если требуется, чтобы не более 2,5% пакетов содержали менее 900 грамм, то на какой средний вес пакета должна быть переналажена машина, чтобы соответствовать этому требованию?

316. Статистические исследования показали, что годовая прибыль работника страхового бизнеса имеет нормальный закон распределения со средним значением 8 000 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 1 000 ден. ед. Случайным образом отобрано лицо, работающее в страховом бизнесе. Какова вероятность того, что его годовая прибыль будет:

1) меньше, чем 6 000 ден. ед.;
2) не меньше, чем 10 000 ден. ед.;
3) между 7 500 и 9 200 ден. ед.

317. Исследования показали, что мужчины выкуривают в среднем 22 сигареты ежедневно. Количество сигарет, выкуриваемых в течение дня, распределяется нормально со средним квадратическим отклонением 8. Какова вероятность того, что случайно выбранное лицо выкурит в течение дня:

1) больше 2 пачек сигарет;

2) меньше 1 пачки сигарет;
3) от 1 до 1,5 пачки сигарет?

318. По многолетним наблюдениям за балансовой прибылью фирмы установлено, что эта прибыль меняется в пределах от 10 000 до 40 000 ден. ед. в месяц. Считая, что она распределена нормально, определить параметры этого распределения и найти вероятность того, что балансовая прибыль в следующем месяце составит 24 000–28 000 ден. ед.

319. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 20$ грамм. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 грамм.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Может ли при каком-нибудь значении аргумента: а) функция распределения больше 1; б) плотность распределения больше 1; в) функция распределения быть отрицательной?
2. Известно, что среднее значение случайной величины равно 5, а дисперсия равна 4. Может ли эта случайная величина иметь показательное распределение?
3. Каково влияние параметров нормального закона на вид кривой распределения?
4. Какова сущность правила трех сигм?
5. Может ли при каких-нибудь a и b выполняться равенство $F(a) - F(b) = 1{,}5$?
6. Какой геометрический смысл имеет вероятность $P(\alpha < X < \beta)$, если случайная величина X распределена равномерно на $[a, b]$, а $[\alpha, \beta] \in [a, b]$?
7. Чему равна вероятность $P(0 < X < 3)$, если случайная величина X распределена равномерно на интервале $[1; 2]$?
8. Укажите, какие из перечисленных функций не могут являться функциями распределения:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)^2, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ (x-2)^3, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ г) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

9. Дан график функции распределения случайной величины X. Как изменится этот график если:
   а) к случайной величине прибавить 1;
   б) вычесть из случайной величины 2;
   в) умножить случайную величину на 2?

1.16. *Понятие о моментах распределения*

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой величины. Для дискретной случайной величины:

$$\nu_k = \mathrm{M}(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathrm{p}_i .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\nu_k = \mathrm{M}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx .$$

В частности, $\nu_0 = \mathrm{M}(X^0) = 1$; $\nu_1 = \mathrm{M}(X)$; $\nu_2 = \mathrm{M}(X^2)$.

Центральным моментом k-го порядка называется математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины X от своего математического ожидания.

Для дискретной случайной величины:

$$\mu_k = \mathrm{M}[X-\mathrm{M}(X)]^k = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathrm{M}(X)]^k \cdot \mathrm{p}_i .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x-\mathrm{M}(X)]^k f(x)dx .$$

В частности, $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2 = \mathrm{D}(X)$.

На практике для вычисления центральных моментов используют формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

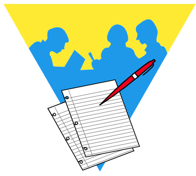
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\ \ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,\ \ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^4 - 3\nu_1^4.$$

Асимметрией A_s теоретического распределения называется величина $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Если «длинная часть» плотности распределения расположена справа от абсциссы точки математического ожидания, то $A_s > 0$, в противном случае $A_s < 0$.

Крутизна кривой плотности распределения вероятностей оценивается при помощи эксцесса $E_к$, который определен следующим образом: $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Для нормального распределения: $A_s = 0$, $E_к = 0$.

Если нормальное и теоретическое распределение имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, то A_s и $E_к$ служат мерой отклонения теоретического распределения от нормального.



ПРИМЕРЫ

320. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков.

РЕШЕНИЕ.

Находим начальные моменты:

$$\nu_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}1;$$

$$\nu_2 = 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9;$$

$$\nu_3 = 1^3 \cdot 0{,}1 + 2^3 \cdot 0{,}3 + 4^3 \cdot 0{,}6 = 40{,}9.$$

Находим центральные моменты:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40{,}9 - 3 \cdot 3{,}1 \cdot 10{,}9 + 2 \cdot (3{,}1)^3 = -0{,}888.$$

321. Непрерывная случайная величина задана своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{1}{2}x & \text{при} \quad 0<x<2,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков.

РЕШЕНИЕ.

Находим начальные моменты:

$$\nu_1 = \mathrm{M}(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

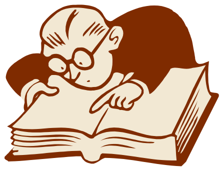
$$\nu_2 = \mathrm{M}(X^2)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=2;$$

$$\nu_3 = \mathrm{M}(X^3)=\int_0^2 x^3\cdot\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{16}{5}.$$

Находим центральные моменты:

$$\mu_1 = 0; \qquad \mu_2 = \nu_2-\nu_1^2 = 2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{16}{5} - 3\cdot\frac{4}{3}\cdot 2 + 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{8}{135}.$$



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

322. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	1	3
p	0,7	0,3

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков.

323. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	0	2	4
p	0,3	0,2	0,5

Найти асимметрию и эксцесс.

324. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	–1	0	1
p	0,2	0,4	0,4

Найти асимметрию и эксцесс.

325. Непрерывная случайная величина задана своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 1 & \text{при} \quad 1<x<2,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков.

326. Непрерывная случайная величина задана своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2x & \text{при} \quad 0<x<1,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$

Найти асимметрию и эксцесс.

327. Непрерывная случайная величина задана своей плотностью распределения: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 0{,}5 & \text{при} \quad 0<x<2,\\ 0 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$

Найти асимметрию и эксцесс.

328. Найти A_s и $E_к$ для равномерного распределения с плотностью распределения вероятности: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,\ b]\\ 0, & x\notin[a,\ b]\end{cases}.$

329. Найти A_s и $E_к$ для экспоненциального (показательного) распределения.

1.17. Многомерные случайные величины

Двумерной случайной величиной (X, Y) называют случайный вектор с координатами X и Y.

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x, y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$.

Если X и Y независимые случайные величины, то: $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$.

Плотность $f(x, y)$ совместного распределения вероятностей (двумерная плотность) определяется следующим образом:

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\partial y}.$$

Свойства $f(x, y)$: 1) $f(x, y) \geq 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dxdy=1$;

3) для независимых случайных величин $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

$F(x, y)$ по $f(x, y)$ находится по формуле:

$$F(x,\ y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dudv.$$

Вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в область G определяется следующим образом:

$$\mathrm{P}((X,\ Y)\in G)=\iint\limits_{G} f(x,\ y)dxdy.$$

Одномерные плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ распределения вероятностей случайной величины X и Y находятся по формулам:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dy, \qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx.$$

Говорят, что (X, Y) имеет двумерный нормальный закон распределения вероятностей, если $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2_{xy}}}e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]},$$

где $a_1 = \mathrm{M}(X)$, $a_2 = \mathrm{M}(Y)$, $\sigma_x^2 = \mathrm{D}(X)$, $\sigma_y^2 = \mathrm{D}(Y)$, $r_{xy}=\frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}$,

$\operatorname{cov}(X, Y)=M\big((X-M(X))\cdot(Y-M(Y))\big)$.

Если $r_{xy} = 0$ (X и Y некоррелированные случайные величины), то: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

Ковариационная матрица (X, Y) определена следующим образом: $\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,\ Y) \\ \operatorname{cov}(X,\ Y) & D(Y) \end{pmatrix}$.

Распределения функций одного и двух случайных аргументов

1. Пусть случайная величина $Y = g(X)$, где X – другая случайная величина с известной плотностью распределения вероятностей $f_X(x)$:

а) если существуют обратные функции $X = \varphi(Y)$, т. е. Y и X связаны взаимно однозначным соответствием, то:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y))\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|;$$

б) если обратная функция для $y = f(x)$ неоднозначная, то, обозначая однозначные ветви через $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ … для $f_Y(y)$ имеем:

$$f_Y(y) = \sum_k f_X(\varphi_k(y))\left|\frac{d\varphi_k(y)}{dy}\right|.$$

2. Пусть (X_1, X_2) пара случайных величин с совместной плотностью распределения вероятностей $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$. Рассмотрим две новые случайные величины Y_1 и Y_2, которые получаются из X_1, X_2 при помощи функционального преобразования $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$:

а) если обратные функции $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2)$, $x_2 = \varphi_2(y_1, y_2)$ для $y_1 = g_1(x_1, x_2)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ однозначные, то совместная плотность для (Y_1, Y_2) задается формулой: $f_{Y_1,\, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,\, X_2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) \cdot \left|\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right|$,

где определитель второго порядка $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)}$ имеет вид:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix};$$

б) если обратные функции неоднозначные и имеют несколько ветвей $\varphi_1^{(k)}(y_1, y_2)$, $\varphi_2^{(k)}(y_1, y_2)$, то:

$$f(y_1, y_2) = \sum_k f_{X_1,\, X_2}(\varphi_1^{(k)}(y_1, y_2), \varphi_2^{(k)}(y_1, y_2))\left|\frac{\partial(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)})}{\partial(y_1, y_2)}\right|.$$

Распределения χ^2, Стьюдента и Фишера

В математической статистике помимо нормального распределения широко используют распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера.

Пусть X_k – $(k = \overline{1,\ n})$ независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $(a,\ \sigma^2)$.

1. Рассмотрим случайную величину $\chi_n^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - a)^2$. Ее закон распределения вероятностей имеет вид:

$$F_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\displaystyle\int_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\alpha > 0$. Это распределение носит название – распределение χ^2 с n степенями свободы.

2. Пусть $Z = \dfrac{X}{Y}$, где X и Y независимые случайные величины, X – распределена по нормальному закону с параметрами $(0,\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n})$, а $Y = \dfrac{\chi_n}{\sqrt{n}}$. Тогда распределение вероятностей вида:

$$F_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\displaystyle\int_0^x (1 + x^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

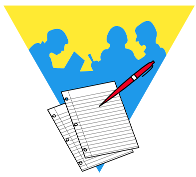
носит название распределение Стьюдента с n степенями свободы.

3. Рассмотрим случайную величину $F_{n_1,\ n_2} = \dfrac{\chi_{n_1}^2 / n_1}{\chi_{n_2}^2 / n}$, где $\chi_{n_1}{}^2$ и $\chi_{n_2}{}^2$ – независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 с n_1 и n_2 степенями свободы соответственно. Закон распределения этой случайной

величины называется распределением Фишера и имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C_0\int\limits_0^x \dfrac{u^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1+n_2u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}du, & x>0\end{cases},$$

где $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}$.



ПРИМЕРЫ

330. Покажем, как на практике появляется нормальный закон распределения вероятностей.

Пусть при стрельбе по мишени двумерная плотность распределения вероятностей координат точки попадания (X, Y) зависит только от расстояния до начала координат: $f(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Пусть X и Y независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда: $f(x, y) = f(x^2 + y^2) = f_1(x)f_1(y)$.

При $y = 0$ $f(x^2) = f_1(0)f_1(x)$ $(f_1(0) \neq 0)$.

Тогда, полагая, что $x^2 = u$, $y^2 = v$, и $\dfrac{f(u)}{f(0)}=g(u)$, имеем уравнение $g(u + v) = g(u)g(v)$, решение которого имеет вид $g(a) = e^{-\lambda u}$, т. е.: $f_1(x) = f_1(0)\cdot e^{-\lambda x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

Учитывая условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx=1$ и положив $\lambda=\dfrac{1}{2\sigma^2}$, получаем окончательно, что $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, а для двумерной плотности: $f(x,\ y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$.

331. Пусть $Y = X^3$. Найти $f_Y(y)$, если известно $f_X(x)$.

РЕШЕНИЕ.

Так как для $y = x^3$ обратная функция однозначная, $x = \sqrt[3]{y}$, то сразу получаем: $f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y}) \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{y^2}}$.

332. Пусть $Y = a\sin X$. Найти плотность распределения вероятностей для случайной величины Y, если у случайной величины X известны плотность распределения вида $f_X(x)$.

РЕШЕНИЕ.

Так как для функции $y = a \sin x$ обратная функция бесконечнозначная: $x = \varphi_k(y) = (-1)^k \cdot \arcsin\dfrac{g}{a} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, то:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{a}\right)^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X\left((-1)^k \arcsin\frac{y}{a} + k\pi\right),\ |y| \le a.$$

333. Пусть X равномерно распределена на $[a, b]$. Найти такую случайную величину $Y = g(X)$, чтобы Y имела заданную плотность распределения вероятностей $f_Y(y)$.

РЕШЕНИЕ.

Пусть $F_Y(y)$ – функция распределения случайной величины Y. Рассмотрим случайную величину $Y = g(X) = F_Y^{-1}\left(\dfrac{X-a}{b-a}\right)$, где $F_Y^{-1}(y)$ – функция обратная $F_Y(y)$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что Y имеет плотность распределения вероятностей $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$.

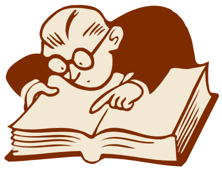
334. Пусть $Y_1 = aX_1 + bX_2$, $Y_2 = cX_1 + dX_2$, $ad - bc \ne 0$. Найти совместную плотность распределения вероятностей для (Y_1, Y_2).

РЕШЕНИЕ.

Так как $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = (ad - bc)^{-1}$, то для $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ получаем:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(a_1y_1 + b_1y_2, c_1y_1 + c_2y_2)|ad - bc|^{-1},$$

здесь a_1, b_1, c_1, d_1 – выражаем через a, b, c, d, если представить решение системы $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 \\ x_2 = c_1 y_1 + d_1 y_2 \end{cases}$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

335. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в круге радиуса r с центром в начале координат. Доказать, что X и Y зависимы, но некоррелированны.

336. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} 2\cos x \cos y & 0 \le x,\ y \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Найти: M(X), M(Y), D(X), D(Y) и cov(X, Y).

337. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x + y) & 0 \le x,\ y \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$.

Найти: M(X), M(Y), D(X), D(Y) и cov(X, Y).

338. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} ax, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$,

где G – треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1). Найти a и ковариационную матрицу.

339. Найти ковариационную матрицу случайного вектора (X, Y), если: $f(x, y) = \dfrac{3}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(5x^2 + 8xy + 5y^2)}$.

340. Для двумерного нормального закона найти условную плотность распределения случайной величины Y: $f(y / X = x) = \dfrac{f(x, y)}{f_X(x)}$.

341. Пусть $Y = X^2$, где X – нормальная случайная величина. Найти $f_Y(y)$.

342. Пусть $Y = a\cos X$. Найти $f_Y(y)$, если $f_X(x)$ известна.

343. Пусть (X_1, X_2) – нормальный вектор с $\mathrm{M}X_1 = a_1$, $\mathrm{M}X_2 = a_2$, $\mathrm{D}X_1 = \sigma_1^2$, $\mathrm{D}X_2 = \sigma_2^2$ и коэффициентом корреляции r. Пусть $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $Y_2 = \mathrm{arctg}\dfrac{X_2}{X_1}$, $|Y_2| \le \pi$. Найти $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$.

344. Пусть $Y_1 = X_1$, $Y_2 = Y = g(X_1, X_2)$. Найти: $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ и $f_Y(y_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)dy_2$. Рассмотреть частные случаи $Y = X_1 + X_2$, $Y = X_1 - X_2$, $Y = X_1X_2$, $Y = \dfrac{X_2}{X_1}$.

345. Случайная величина X имеет показательный закон с плотностью $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Пусть $Y = g(X)$. Найти вид $g(x)$, если Y имеет распределение Коши с плотностью $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1 + y^2)}$. Найти закон распределения для χ^2, зная закон распределения для $\sqrt{\chi^2}$, $X = \dfrac{\chi}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{\chi^2}{n}$.